

Татьяна Анатольевна Устинова – «Автоматтандыру және ақпараттық технологиялар» кафедрасының аға оқытушысы, Шәкәрім университеті, Семей қаласы, Қазақстан; e-mail: ustanova-t-a@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-8244-6043>.

Сведения об авторах

Динара Жаксылыковна Шырынханова – докторант Школы цифровых технологий и искусственного интеллекта, Восточно-Казахстанский технический университет имени Д. Серикбаева, г. Усть-Каменогорск, Казахстан; e-mail: d.shyrynkhanova@shakarim.kz. ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-5311-1221>.

Индира Бекеновна Карымсакова* – PhD доктор кафедры «Автоматизация и информационные технологии», Шәкәрім университет, г. Семей, Казахстан; e-mail: karymsakova.indira@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1496-3188>.

Гүлназ Жомартқызы – PhD доктор, ассоциированный профессор Школы цифровых технологий и искусственного интеллекта, Восточно-Казахстанский технический университет имени Д. Серикбаева, г. Усть-Каменогорск, Казахстан; e-mail: GZhomartkyzy@edu.ektu.kz. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1465-3451>.

Динара Ошановна Кожаметова – PhD доктор, ассоциированный профессор кафедры «Автоматизация и информационные технологии», Шәкәрім Университет, г. Семей, Казахстан; e-mail: d.kojahmetova@shakarim.kz. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4327-3899>.

Татьяна Анатольевна Устинова – старший преподаватель кафедры «Автоматизация и информационные технологии», Шәкәрім университет, г. Семей, Казахстан; e-mail: ustanova-t-a@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-8244-6043>.

Information about the authors

Dinara Zhaksylykovna Shyrynkhanova – Doctoral (PhD) student, School of Digital Technologies and Artificial Intelligence, D. Serikbayev East Kazakhstan Technical University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan; e-mail: d.shyrynkhanova@shakarim.kz. ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-5311-1221>.

Indira Bekenovna Karymsakova* – PhD, Department of Automation and Information Technologies, Shakarim University, Semey, Kazakhstan; e-mail: karymsakova.indira@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1496-3188>.

Gulnaz Zhomartkyzy – PhD, Associate Professor, School of Digital Technologies and Artificial Intelligence, D. Serikbayev East Kazakhstan Technical University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan; e-mail: GZhomartkyzy@edu.ektu.kz. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1465-3451>.

Dinara Oshanovna Kozhakhmetova – PhD, Associate Professor, Department of Automation and Information Technologies, Shakarim University, Semey, Kazakhstan; e-mail: d.kojahmetova@shakarim.kz. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4327-3899>.

Tatyana Anatolyevna Ustinova – Senior Lecturer of the Department of Automation and Information Technologies, Shakarim University, Semey, Kazakhstan; e-mail: ustanova-t-a@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-8244-6043>.

Редакцияға енуі 30.03.2026

Өңдеуден кейін түсуі 14.05.2026

Жариялауға қабылданды 18.05.2026

[https://doi.org/10.53360/2788-7995-2026-2\(22\)-10](https://doi.org/10.53360/2788-7995-2026-2(22)-10)

FTAXP: 28.15.19



Ә.Ж. Жамбулатова*, Қ. Әлімхан

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті,
010000, Қазақстан Республикасы, Астана қ., Сәтпаев көшесі, 2

*e-mail: aigerimzhambulat@gmail.com

КОММУТАЦИЯЛАНАТЫН КЕШІГҮІ БАР СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ЖҮЙЕЛЕРДІҢ ТҰРАҚТЫЛЫҒЫ

Аннотация: Бұл жұмыста уақыт бойынша кешігуі бар коммутацияланатын сызықты емес жүйелердің тұрақтылығы мәселесі қарастырылады. Қарастырылатын жүйе динамикасы бірнеше ішкі жүйелер арасында ауысуды сипаттайтын коммутация сигналы арқылы анықталады және уақыттық кешігу әсері ескеріледі. Коммутация сигналы ерікті түрде өзгертін жағдайда жүйенің

©Ә.Ж. Жамбулатова, Қ. Әлімхан, 2026

орнықтылығын қамтамасыз ету басқару теориясындағы күрделі әрі өзекті ғылыми мәселелердің бірі болып табылады. Зерттеу барысында Ляпунов-Красовский функционалына негізделген әдіс қолданылып, кешігуі бар коммутацияланатын сызықты емес жүйелер үшін тұрақтылықтың жеткілікті шарттары алынды. Ұсынылған тәсіл жүйенің сызықты емес қасиеттерін, уақыттық кешігу мүшелерін және коммутация әсерін бір уақытта ескеруге мүмкіндік береді, бұл классикалық нәтижелерді жалпылауға жол ашады. Сонымен қатар, жүйені шекті уақытта тұрақтандыру шарттары зерттеліп, сәйкес күйлік кері байланыс басқару заңы ұсынылды. Бұл басқару заңы жүйе күйлерін шектеулі уақыт ішінде нөлдік тепе-теңдікке жеткізуді қамтамасыз етеді және асимптотикалық тұрақтылықпен салыстырғанда жылдам тұрақтануды қамтамасыз етеді. Алынған теориялық нәтижелер сандық модельдеу арқылы тексерілді. Модельдеу нәтижелері жүйе күй айнималыларының коммутация мен кешігу әсеріне қарамастан нөлдік тепе-теңдікке ұмтылатынын көрсетті. Сонымен қатар, коммутация сигналының бірнеше рет өзгеруі жүйенің орнықтылығына кері әсер етпейтіні байқалды. Зерттеу нәтижелері ұсынылған әдістің тиімділігін дәлелдей отырып, оны кешігуі бар коммутацияланатын сызықты емес жүйелерді басқару есептерінде қолдануға болатындығын көрсетеді.

Түйін сөздер: коммутацияланатын жүйе, сызықты емес жүйе, уақыт бойынша кешігу, тұрақтылық, шекті уақыттағы тұрақтандыру, Ляпунов-Красовский функционалы, коммутация сигналы, басқару.

Кіріспе

Коммутацияланатын жүйелер басқару теориясының маңызды бағыттарының бірі болып табылады. Мұндай жүйелер бірнеше режимдерден тұрып, коммутация сигналы арқылы сипатталады. Коммутацияланатын жүйелер әртүрлі инженерлік салаларда кеңінен қолданылады [1-3]. Сондықтан олардың тұрақтылығын талдау маңызды ғылыми мәселе болып табылады.

Коммутацияланатын жүйелерді зерттеуге қызығушылық олардың әртүрлі режимдер арасында ауысуымен және кейбір жүйелерді тек коммутация арқылы тұрақтандыру мүмкіндігімен түсіндіріледі. Соңғы жылдары коммутация негізіндегі басқару әдістері кеңінен зерттелуде [4-6]. Әдебиеттерде коммутацияланатын жүйелердің тұрақтылығына қатысты үш негізгі мәселе қарастырылады: ерікті коммутация, шектеулі коммутация және тұрақтандырушы заңдарды құру [1,3]. Біріншісі – кез келген коммутациялық сигнал үшін жүйенің асимптотикалық тұрақтылығын қамтамасыз ететін шарттарды анықтау. Екіншісі – коммутация сигналдарының белгілі бір кластары үшін тұрақтылықты зерттеу, яғни коммутация жылдамдығына немесе құрылымына қойылатын шектеулер арқылы жүйенің орнықтылығын қамтамасыз ету. Үшіншісі – жүйені тұрақтандыратын коммутациялық заңдарды құру, бұл басқару жүйесін жобалау тұрғысынан ерекше маңызды болып табылады.

Классикалық нәтижелер барлық ішкі жүйелердің тұрақтылығы жалпы жүйе тұрақтылығын қамтамасыз етпейтінін көрсетеді [4-7]. Басқаша айтқанда, тұрақты ішкі жүйелердің өзара дұрыс емес коммутациясы жүйенің тұрақсыздығына алып келуі мүмкін. Сондықтан ортақ Ляпунов функциясы және кешігуге байланысты әдістер кеңінен зерттелген [2, 4-8]. Сонымен қатар, кейбір жағдайларда барлық ішкі жүйелер тұрақсыз болса да, арнайы құрылған коммутациялық заң арқылы бүкіл жүйені тұрақтандыру мүмкіндігі бар екендігі көрсетілген [4, 9, 10]. Сонымен қатар, сызықты емес және уақыт бойынша кешігуі бар коммутацияланатын жүйелер үшін тұрақтылықты қамтамасыз ету мәселесі толық шешімін тапқан жоқ [3, 11]. Ерікті коммутация жағдайында шекті уақыттағы тұрақтандыру өзекті мәселе болып табылады [11-15]. Бұл бағытта Ляпунов-Красовский функционалдары және күйлік кері байланыс әдістері қолданылады.

Бұл жұмыстың мақсаты – кешігуі бар коммутацияланатын сызықты емес жүйелердің тұрақтылығын зерттеу және оларды шекті уақытта тұрақтандыру әдісін құру. Жұмыста ерікті коммутация жағдайында жүйенің тұрақтылығын қамтамасыз ететін жаңа шарттар ұсынылады және ортақ Ляпунов функциясына негізделген басқару әдісі қарастырылады.

Зерттеу шарттары мен әдістері

Бұл жұмыста Ляпунов-Красовский функционалына негізделген әдіс қолданылды. Бұл тәсіл кешігу әсерін ескеруге мүмкіндік береді және жүйенің орнықтылығын зерттеуде тиімді құрал болып табылады.

Коммутация сигналы ерікті түрде өзгертін бөлшектік-тұрақты функция ретінде қарастырылады. Кешігу функциясы шектелген және үздіксіз деп алынды.

Жүйенің тұрақтылығын талдау үшін ортақ Ляпунов функциясы қолданылып, функционалдың туындысы арқылы жеткілікті шарттар алынған. Сонымен қатар, жүйені шекті уақытта тұрақтандыру үшін күйлік кері байланыс басқару заңы ұсынылды.

Зерттеу нәтижелері

Осы жұмыста уақыт бойынша кешігуі бар коммутацияланатын сызықты емес жүйе келесі түрде қарастырылады:

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t), x(t - \tau(t))), \quad t \geq 0,$$

Мұндағы $x(t) \in \mathbb{Y}^n$ – жүйенің күй векторы, $\sigma(t): [0, \infty) \rightarrow P = \{1, 2, \dots, m\}$ – коммутация сигналы, $f_p(\cdot, \cdot)$, $p \in P$ – жеткілікті тегіс сызықты емес векторлық функциялар, $\tau(t) \in [0, \bar{\tau}]$ – шектелген уақыттық кешігу.

Коммутация сигналы $\sigma(t)$ бөлшектік-тұрақты функция болып табылады және жүйе динамикасының әртүрлі режимдер арасында ауысуын сипаттайды. Әрбір $p \in P$ үшін ішкі жүйе келесі түрде беріледі:

$$\dot{x}(t) = f_p(x(t), x(t - \tau(t))).$$

Жүйенің бастапқы шарттары келесі түрде беріледі:

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\bar{\tau}, 0], L$$

Мұндағы $\phi(\cdot)$ – берілген үздіксіз бастапқы функция. Жұмыста келесі негізгі болжамдар қабылданады:

Болжам 1. Әрбір $f_p(x, y)$ функциясы аргументтері бойынша локальды Липшиц шартын қанағаттандырады, яғни жүйе шешімінің бар болуы мен бірегейлігі қамтамасыз етіледі.

Болжам 2. Кешігу функциясы $\tau(t)$ шектелген және үздіксіз, яғни $0 \leq \tau(t) \leq \bar{\tau}$.

Болжам 3. Коммутация сигналы $\sigma(t)$ ерікті, яғни алдын ала берілген шектеулерсіз таңдалады.

Осы жұмыстың негізгі мақсаты – жоғарыда берілген жүйе үшін тепе-теңдік күй $x = 0$ -дің тұрақтылығын зерттеу және оны шекті уақытта тұрақтандыру шарттарын алу болып табылады.

Атап айтқанда, келесі мәселелер қарастырылады:

– ерікті коммутация жағдайында жүйенің тұрақтылығын қамтамасыз ететін жеткілікті шарттарды анықтау;

– кешігуі бар жүйелер үшін Ляпунов-Красовский функционалы негізінде тұрақтылықты талдау;

– жүйені шекті уақытта тұрақтандыратын күйлік кері байланыс басқару заңын құру.

Жоғарыда қойылған есепті шешу үшін ортақ Ляпунов функциясы және уақыттық кешігуді ескеретін функционалдық әдістер қолданылады. Алынған нәтижелер коммутацияланатын сызықты емес жүйелердің тұрақтылығын талдауда және басқару заңдарын жобалауда қолданылуы мүмкін.

Теорема 1. Қарастырылып отырған коммутацияланатын сызықты емес жүйе

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t), x(t - \tau(t)))$$

үшін жоғарыда берілген Болжамдар 1-3 орындалсын. Егер келесі шарттар орындалса:

1. Әрбір $p \in P$ үшін үздіксіз дифференциалданатын функция

$$V(x): \mathbb{Y}^n \rightarrow \mathbb{Y}_+$$

бар болып, ол оң анықталған және радиалды шектелмеген;

2. Кейбір $c_1, c_2 > 0$ тұрақтылары үшін

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq c_2 \|x\|^2;$$

3. Жүйе траекториялары бойымен келесі теңсіздік орындалса:

$$\dot{V}(x(t)) \leq -\alpha V(x(t)) + \beta V(x(t - \tau(t)))$$

мұндағы $\alpha > \beta > 0$; онда жүйе кез келген коммутация сигналы $\sigma(t)$ үшін глобальды асимптотикалық тұрақты болады. Сонымен қатар, егер қосымша

$$\dot{V}(x(t)) \leq -kV^\gamma(x(t)), \quad 0 < \gamma < 1$$

шарты орындалса, онда жүйе шекті уақытта тұрақты болады.

Дәлелдеу. Ляпунов–Красовский әдісін қолданайық. Келесі функционалды қарастырамыз:

$$W(t) = V(x(t)) + \int_{t-\tau(t)}^t V(x(s))ds$$

Бұл функционал оң анықталған және шектелген, өйткені $V(x)$ оң анықталған.

Енді $W(t)$ -ның туындысын есептейік:

$$\dot{W}(t) = \dot{V}(x(t)) + V(x(t)) - V(x(t-\tau(t)))(1-\dot{\tau}(t)).$$

$\dot{\tau}(t) \leq 1$ екенін ескерсек, келесі бағалауды аламыз:

$$\dot{W}(t) \leq \dot{V}(x(t)) + V(x(t)).$$

Шарт бойынша:

$$\dot{V}(x(t)) \leq -\alpha V(x(t)) + \beta V(x(t-\tau(t))).$$

Осыны орнына қойсақ:

$$\dot{W}(t) \leq -(\alpha-1)V(x(t)) + \beta V(x(t-\tau(t))).$$

$\alpha > \beta$ болғандықтан, сәйкес тұрақтыларды таңдау арқылы

$$\dot{W}(t) \leq -\delta W(t), \quad \delta > 0$$

түріндегі бағалауды алуға болады. Бұл теңсіздік Ляпунов теоремасы бойынша жүйенің глобалды асимптотикалық тұрақтылығын қамтамасыз етеді. Енді шекті уақыттағы тұрақтылықты қарастырайық. Егер

$$\dot{V}(x(t)) \leq -kV^\gamma(x(t)), \quad 0 < \gamma < 1,$$

онда айнымалыларды бөлу арқылы:

$$\frac{dV}{V^\gamma} \leq -kdt.$$

Интегралдап:

$$V^{1-\gamma}(t) \leq V^{1-\gamma}(0) - k(1-\gamma)t.$$

Осыдан:

$$T \leq \frac{V^{1-\gamma}(0)}{k(1-\gamma)}.$$

Яғни, жүйе шекті уақытта нөлге жетеді.

Бұл жұмыста кешігуі бар коммутацияланатын сызықты емес жүйелердің тұрақтылығы зерттеліп, негізгі теориялық нәтижелер алынды. Ляпунов–Красовский функционалы негізінде тұрақтылықтың жеткілікті шарттары алынды. Ұсынылған әдіс коммутация сигналы ерікті түрде өзгеретін жағдайда да жүйенің орнықтылығын талдауға мүмкіндік береді. Бұл нәтижелер коммутацияланатын жүйелер теориясындағы белгілі классикалық тұжырымдарды жалпылай отырып, кешігу әсерін ескеретін жаңа шарттарды ұсынады.

Жүйені шекті уақытта тұрақтандыру шарттары анықталды. Атап айтқанда, сызықты емес күйлік кері байланыс басқару заңы негізінде жүйе күйлерін нөлдік тепе-теңдікке шекті уақыт ішінде жеткізу мүмкіндігі көрсетілді. Бұл асимптотикалық тұрақтылықпен салыстырғанда жылдамырақ тұрақтануды қамтамасыз етеді.

Алынған теориялық нәтижелер сандық модельдеу арқылы расталды. Модельдеу нәтижелері жүйе күйлерінің нөлдік тепе-теңдікке ұмтылатынын көрсетті. Коммутация жүйе орнықтылығына кері әсер етпейді. Жалпы алғанда, ұсынылған әдіс уақыт бойынша кешігуі бар коммутацияланатын сызықты емес жүйелердің тұрақтылығын қамтамасыз етуде тиімді құрал болып табылады және практикалық қолданбаларда пайдалануға жарамды.

Ғылыми нәтижелерді талқылау

Алынған нәтижелер кешігуі бар коммутацияланатын жүйелердің тұрақтылығын талдауды кеңейтеді. Ұсынылған тәсіл кешігу мен коммутация әсерін бірге ескеруге мүмкіндік береді. Алынған теориялық шарттар классикалық нәтижелермен салыстырғанда жалпылама сипатқа ие, себебі олар коммутация сигналына алдын ала шектеулер қоймай-ақ жүйенің

орнықтылығын қамтамасыз етеді. Бұл әдістің практикалық маңыздылығын көрсетеді. Сонымен қатар, жүйені шекті уақытта тұрақтандыру шарттарының алынуы басқару сапасын жақсартуға мүмкіндік береді, өйткені жүйе күйлері шектеулі уақыт ішінде нөлдік тепе-теңдікке жеткізіледі.

Коммутацияланатын жүйелердің тұрақтылығын зерттеуде жиі қолданылатын әдістердің бірі – ортақ Ляпунов функциясын құру болып табылады. Алайда кешігуі бар жүйелерде бұл әдісті тікелей қолдану әрқашан мүмкін емес. Осы тұрғыдан алғанда, Ляпунов-Красовский функционалын қолдану кешігу әсерін ескеретін тиімді тәсіл ретінде қарастырылады. Модельдеу нәтижелері жүйенің орнықтылығын көрсетеді. Жүйе күйлері орнықты күйге келеді. Бұл ұсынылған басқару заңының практикалық маңыздылығын арттырады.

Сонымен бірге, ұсынылған әдістің кейбір шектеулері де бар. Атап айтқанда, алынған нәтижелер белгілі бір сызықты емес функциялар класы үшін орындалады және басқару параметрлерін дұрыс таңдауды талап етеді. Болашақ зерттеулерде бұл тәсілді белгісіз параметрлері бар және жоғары өлшемді жүйелерге жалпылау маңызды бағыттардың бірі болып табылады.

Сандық мысал. Ұсынылған нәтижелердің тиімділігін көрсету үшін уақыт бойынша кешігуі бар коммутацияланатын сызықты емес жүйенің келесі моделі қарастырылады:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = -a_{\sigma(t)}x_1(t) - b_{\sigma(t)}x_2(t) - c_{\sigma(t)}x_1(t - \tau) - k_1 |x_1(t)|^\gamma \operatorname{sgn}(x_1(t)) - k_2 |x_2(t)|^\gamma \operatorname{sgn}(x_2(t)).$$

Мұндағы $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T$ – жүйе күй векторы, $\sigma(t) \in \{1, 2\}$ – коммутация сигналы, $\tau > 0$ – тұрақты кешігу, $0 < \gamma < 1$.

Жүйе параметрлері келесі түрде таңдалды:

$$a_1 = 2.0, \quad b_1 = 1.8, \quad c_1 = 0.25,$$

$$a_2 = 1.6, \quad b_2 = 2.2, \quad c_2 = 0.20,$$

$$\tau = 0.15, \quad k_1 = 1.2, \quad k_2 = 1.0, \quad \gamma = 0.7.$$

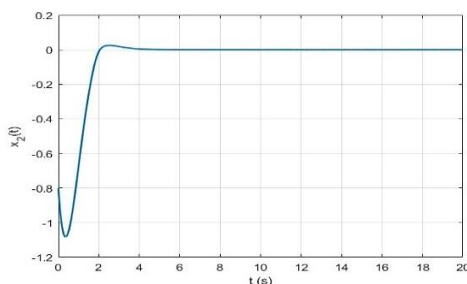
Таңдалған параметрлер Теорема 1 шарттарын қанағаттандырады. Коммутация сигналы бөлшектік-тұрақты заң бойынша анықталды. Коммутация мезеттері:

$$t_s = \{2, 4, 6.5, 9, 11, 13.5, 16\}$$

Коммутация сигналы ерікті түрде таңдалған. Бастапқы шарт:

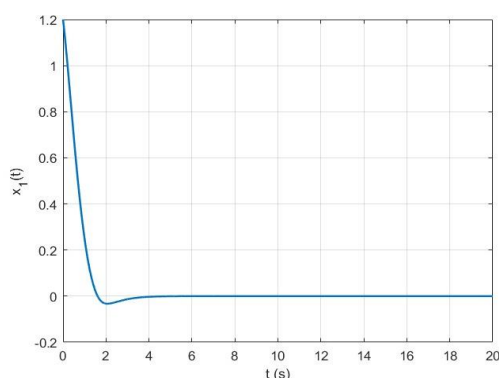
$$x_1(t) = 1.2, \quad x_2(t) = -0.8, \quad t \in [-\tau, 0]$$

Жүргізілген сандық модельдеу нәтижелері 1-3 суреттерде көрсетілген.

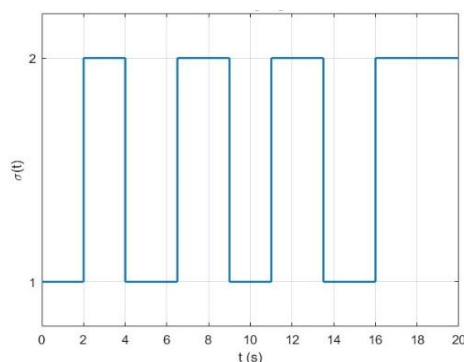


Сурет 1 – $x_1(t)$ күй айнымалысының уақыт бойынша өзгерісі

1-суретте $x_1(t)$ күй айнымалысының уақыт бойынша өзгерісі берілген. Суреттен көріп отырғанымыздай, коммутация және кешігу әсеріне қарамастан $x_1(t)$ уақыт өте нөлге ұмтылады. 2-суретте $x_2(t)$ күй айнымалысының динамикасы көрсетілген. Бұл айнымалы нөлдік тепе-теңдікке ұмтылады. 3-суретте $\sigma(t)$ коммутация сигналының уақыт бойынша өзгерісі келтірілген. Коммутацияға қарамастан жүйе орнықты күйге келеді.



Сурет 2 – $x_2(t)$ күй айнымалысының уақыт бойынша өзгерісі



Сурет 3 – $\sigma(t)$ коммутация сигналының уақыт бойынша өзгерісі

Алынған нәтижелер көрсеткендей, ұсынылған басқару заңы мен Ляпунов негізіндегі әдіс уақыт бойынша кешігуі бар коммутацияланатын сызықты емес жүйелерді тиімді түрде тұрақтандырады. Жүйе күйлері барлық коммутация режимдері үшін нөлдік тепе-теңдікке ұмтылады, бұл алынған нәтижелер Теорема 1-де алынған тұжырымдарды растайды. Айта кету керек, сандық модельдеу кезінде күй айнымалылары теориядағыдай дәл нөлге жетпей, нөлдің өте кіші маңайына жинақталады. Бұл сандық интеграторлардың шектеулеріне байланысты қалыпты құбылыс болып табылады.

Қорытынды

Бұл жұмыста уақыт бойынша кешігуі бар коммутацияланатын сызықты емес жүйелердің тұрақтылығы мәселесі қарастырылды. Коммутация сигналы ерікті түрде өзгертін жағдайда жүйенің орнықтылығын қамтамасыз ету шарттары зерттелді.

Жұмыс барысында Ляпунов-Красовский функционалына негізделген тәсіл қолданылып, кешігуі бар жүйелер үшін тұрақтылықтың жеткілікті шарттары алынды. Ұсынылған әдіс жүйенің динамикасын сипаттайтын сызықты емес және кешігу мүшелерін ескеруге мүмкіндік береді. Сонымен қатар, алынған нәтижелер негізінде жүйені шекті уақытта тұрақтандыратын басқару заңы қарастырылды.

Теориялық нәтижелердің дұрыстығы сандық мысал арқылы расталды. Жүргізілген модельдеу нәтижелері күй айнымалыларының коммутация мен кешігу әсеріне қарамастан нөлдік тепе-теңдікке ұмтылатынын көрсетті. Бұл ұсынылған әдістің тиімділігін және оның коммутацияланатын кешігуі бар сызықты емес жүйелер үшін қолдануға жарамдылығын дәлелдейді.

Алынған нәтижелер басқару теориясындағы коммутацияланатын жүйелерді тұрақтандыру мәселелерін дамытуға белгілі бір үлес қосады. Ұсынылған тәсілді күрделі құрылымды жүйелерге, соның ішінде жоғары өлшемді және белгісіз параметрлері бар жүйелерге қолдану болашақ зерттеулердің маңызды бағыты болып табылады. Алынған нәтижелер коммутацияланатын жүйелер теориясының дамуына үлес қосады [6, 9-12].

Әдебиеттер тізімі

1. Liberzon D. Switching in Systems and Control / D. Liberzon. – Boston : Springer, 2012. – 233 p.
2. Fridman E. Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control / E. Fridman. – Basel: Birkhäuser, 2014. – 336 p.
3. Zuo Z. Non-singular fixed-time terminal sliding mode control of nonlinear systems / Z. Zuo // Automatica. – 2015. – Vol. 54. – P. 305-309.
4. Seuret A. Stability of time-delay systems / A. Seuret, F. Gouaisbaut // Annual Reviews in Control. – 2015. – Vol. 39. – P. 45-52.
5. Sun Z. Switched Linear Systems: Control and Design / Z. Sun, S.S. Ge. – London: Springer, 2019. – 270 p.
6. Chen T. Finite-time stabilization of delayed nonlinear systems / T. Chen, X. Liu // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2019. – Vol. 64, № 6. – P. 2501-2508.
7. Zhang W. Stability analysis of switched nonlinear systems with time delays / W. Zhang, H. Lin // Automatica. – 2020. – Vol. 117. – Art. 108956.
8. Li X. Finite-time stability of nonlinear switched systems with delays / X. Li, Y. Wang // Nonlinear Analysis. – 2021. – Vol. 209. – Art. 112353.
9. Zhao Y. Stability of switched nonlinear systems under arbitrary switching / Y. Zhao, H. Li // Journal of the Franklin Institute. – 2021. – Vol. 358, № 12. – P. 6120-6138.
10. Yu W. Recent advances in switched systems control / W. Yu, G. Chen // IEEE Access. – 2022. – Vol. 10. – P. 45678-45695.
11. Wang L. Finite-time control for nonlinear systems with delay / L. Wang, X. Zhao // Applied Mathematics and Computation. – 2023. – Vol. 438. – Art. 127567.
12. Defoort M. Fixed-time stabilization: a survey / M. Defoort, A. Polyakov // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. – 2018. – Vol. 24, № 2. – P. 743-767.
13. Briat C. Linear Parameter-Varying and Time-Delay Systems / C. Briat. – Berlin: Springer, 2015. – 398 p.
14. Ефимов Д.В. Конечновременная устойчивость и управление нелинейными системами / Д.В. Ефимов, В. Перрукетти. – Cham : Springer, 2017. – 412 с.
15. Смагулов, А.А. Коммутацияланатын жүйелердің тұрақтылығы / А.А. Смагулов, К.М. Нуртазин // Вестник КазНУ. – 2021. – № 3(127). – Б. 45-51.

References

1. Liberzon D. Switching in Systems and Control / D. Liberzon. – Boston : Springer, 2012. – 233 p. (In English).
2. Fridman E. Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control / E. Fridman. – Basel: Birkhäuser, 2014. – 336 p. (In English).
3. Zuo Z. Non-singular fixed-time terminal sliding mode control of nonlinear systems / Z. Zuo // Automatica. – 2015. – Vol. 54. – P. 305-309. (In English).
4. Seuret A. Stability of time-delay systems / A. Seuret, F. Gouaisbaut // Annual Reviews in Control. – 2015. – Vol. 39. – P. 45-52. (In English).
5. Sun Z. Switched Linear Systems: Control and Design / Z. Sun, S.S. Ge. – London: Springer, 2019. – 270 p. (In English).
6. Chen T. Finite-time stabilization of delayed nonlinear systems / T. Chen, X. Liu // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2019. – Vol. 64, № 6. – P. 2501-2508. (In English).
7. Zhang W. Stability analysis of switched nonlinear systems with time delays / W. Zhang, H. Lin // Automatica. – 2020. – Vol. 117. – Art. 108956. (In English).
8. Li X. Finite-time stability of nonlinear switched systems with delays / X. Li, Y. Wang // Nonlinear Analysis. – 2021. – Vol. 209. – Art. 112353. (In English).
9. Zhao Y. Stability of switched nonlinear systems under arbitrary switching / Y. Zhao, H. Li // Journal of the Franklin Institute. – 2021. – Vol. 358, № 12. – P. 6120-6138. (In English).
10. Yu W. Recent advances in switched systems control / W. Yu, G. Chen // IEEE Access. – 2022. – Vol. 10. – P. 45678-45695. (In English).
11. Wang L. Finite-time control for nonlinear systems with delay / L. Wang, X. Zhao // Applied Mathematics and Computation. – 2023. – Vol. 438. – Art. 127567. (In English).
12. Defoort M. Fixed-time stabilization: a survey / M. Defoort, A. Polyakov // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. – 2018. – Vol. 24, № 2. – P. 743-767. (In English).

13. Briat C. Linear Parameter-Varying and Time-Delay Systems / C. Briat. – Berlin: Springer, 2015. – 398 p. (In English).
14. Efimov D.V. Konechnovremennaya ustoichivost' i upravlenie nelineinymi sistemami / D.V. Efimov, V. Perruketti. – Cham : Springer, 2017. – 412 s. (In Russian).
15. Smagulov, A.A. Kommutatsiyalanatyn zhuierlerdin turaktylygy / A.A. Smagulov, K.M. Nurtazin // Vestnik KazNU. – 2021. – № 3(127). – В. 45-51. (In Kazakh).

Ә.Ж. Жамбулатова*, Қ. Әлімхан

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева,
010000, Республика Казахстан, г.Астана., ул.Сәтпаева, 2

*e-mail: aigerimzhambulat@gmail.com

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ КОММУТАЦИОННЫХ СИСТЕМ С ВРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Аннотация: В данной работе рассматривается задача устойчивости переключаемых нелинейных систем с запаздыванием по времени. Динамика рассматриваемой системы определяется переключающим сигналом, описывающим переходы между несколькими подсистемами, при этом учитывается влияние временного запаздывания. Обеспечение устойчивости системы при произвольном изменении переключающего сигнала является сложной и актуальной задачей теории управления. В ходе исследования применён метод, основанный на функционале Ляпунова-Красовского, с помощью которого получены достаточные условия устойчивости для переключаемых нелинейных систем с запаздыванием. Предложенный подход позволяет одновременно учитывать нелинейные свойства системы, временные задержки и эффект переключения, что обеспечивает обобщение классических результатов. Кроме того, исследованы условия стабилизации системы за конечное время и предложен соответствующий закон управления в виде нелинейной обратной связи по состоянию. Данный закон управления обеспечивает достижение нулевого равновесия за конечное время и более быструю стабилизацию по сравнению с асимптотическим режимом. Полученные теоретические результаты подтверждены численным моделированием. Результаты моделирования показывают, что переменные состояния системы стремятся к нулевому равновесию независимо от воздействия переключения и запаздывания. Также установлено, что многократное изменение переключающего сигнала не нарушает устойчивость системы. Полученные результаты демонстрируют эффективность предложенного метода и его применимость для задач управления переключаемыми нелинейными системами с запаздыванием.

Ключевые слова: коммутационная система, нелинейная система, временное запаздывание, устойчивость, стабилизация за конечное время, функционал Ляпунова–Красовского, коммутационный сигнал, управление

A. Zhambulatova*, K. Alimhan

L.N. Gumilyov Eurasian National University,
010000, Republic of Kazakhstan, Astana, Satpayev Street, 2

*e-mail: aigerimzhambulat@gmail.com

STABILITY OF NONLINEAR SWITCHED SYSTEMS WITH TIME DELAY

This paper addresses the stability problem of switched nonlinear systems with time delay. The dynamics of the considered system are governed by a switching signal that describes transitions between multiple subsystems, while the effect of time delay is explicitly taken into account. Ensuring system stability under arbitrary switching signals is a challenging and important problem in control theory. In this study, a method based on the Lyapunov-Krasovskii functional is employed to derive sufficient stability conditions for switched nonlinear systems with time delay. The proposed approach allows simultaneous consideration of nonlinear system properties, time-delay effects, and switching behavior, thereby providing a generalization of classical results. In addition, finite-time stabilization conditions are investigated, and a corresponding nonlinear state-feedback control law is proposed. This control law guarantees that the system states converge to the equilibrium within a finite time and achieves faster stabilization compared to asymptotic stability. The obtained theoretical results are validated through numerical simulations. The simulation results demonstrate that the system state variables converge to the equilibrium despite the presence of switching and time delay. Moreover, multiple switchings do not deteriorate system stability. The results confirm the effectiveness of the proposed method and show its applicability to the control of switched nonlinear systems with time delay.

Key words: switched system, nonlinear system, time delay, stability, finite-time stabilization, Lyapunov-Krasovskii functional, switching signal, control.

Авторлар туралы мәліметтер

Әйгерім Жақыпқызы Жамбулатова* – магистр, «Математикалық және компьютерлік моделдеу» кафедрасының аға оқытушысы, Л.Н. Гумилев Еуразия ұлттық университеті, Қазақстан; e-mail: aigerimzhambulat@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-7749-086X>.

Қилан Әлімхан – PhD, профессор кафедрасы «Математическое и компьютерное моделирование», Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилёва, Казахстан; e-mail: keylan@live.jp. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0766-2229>.

Сведения об авторах

Әйгерім Жақыпқызы Жамбулатова* – магистр, старший преподаватель кафедры «Математическое и компьютерное моделирование», Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилёва, Казахстан; e-mail: aigerimzhambulat@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-7749-086X>.

Қилан Әлімхан – PhD, профессор кафедры «Математическое и компьютерное моделирование», Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилёва, Казахстан; e-mail: keylan@live.jp. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0766-2229>.

Information about the authors

Aigerim Zhambulatova* – Master's degree, Senior Lecturer of the Department of Mathematical and Computer Modeling, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazakhstan; e-mail: aigerimzhambulat@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-7749-086X>.

Keylan Aimhan – PhD, Professor of the Department of Mathematical and Computer Modeling, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazakhstan; e-mail: keylan@live.jp. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0766-2229>.

Редакцияға енуі 09.04.2026
Өңдеуден кейін түсуі 24.04.2026
Жариялауға қабылданды 19.05.2026

[https://doi.org/10.53360/2788-7995-2026-2\(22\)-11](https://doi.org/10.53360/2788-7995-2026-2(22)-11)

МРНТИ: 50.41.25; 50.41.29



**Д.Ж. Шырынханова¹, Т.С. Жылқыбаев², Т.А. Устинова², Е.Р. Советбаев²,
Қ.Б. Байбосинова²**

¹Восточно-Казахстанский технический университет им. Д. Серикбаева,
Республика Казахстан, г. Усть-каменогорск

²Шәкәрім университет,
Республика Казахстан, г. Семей, уг. Глинки, 20 А

*e-mail: tursynhan.jylqybaev@shakarim.kz

ВНЕДРЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ПАСПОРТОВ ЛАБОРАТОРИЙ ДЛЯ УЧЁТА ОБОРУДОВАНИЯ И ПРИБОРОВ

Аннотация: В данной статье представлена разработка информационной системы цифровых паспортов лабораторного оборудования, предназначенной для автоматизации учета, идентификации и фиксации истории эксплуатации материально-технических ресурсов в лабораториях высших учебных заведений. Актуальность исследования обусловлена необходимостью перехода от бумажных журналов и электронных таблиц к более надежным цифровым решениям, обеспечивающим прозрачность, доступность и структурированное хранение данных об оборудовании.

Целью исследования является разработка и тестирование прототипа системы, обеспечивающей быструю идентификацию лабораторного оборудования с использованием QR-

©Д.Ж. Шырынханова, Т.С. Жылқыбаев, Т.А. Устинова, Е.Р. Советбаев, Қ.Б. Байбосинова, 2026