

Асия Исаева – Инновациялар және білім беру орталығының жетекшісі, Қазақстан Республикасы Президенті Іс басқармасы Медициналық орталығының Ұлттық госпиталі, Алматы, Қазақстан; e-mail: issayeva_a@snh.kz. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1673-3965>.

Information about the authors

Maxat Kabdullin* – Satbayev University, Almaty, Kazakhstan; e-mail: m.kabdullin@satbayev.university. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7320-6259>.

Lyazat Naizabayeva – Doctor of Technical Sciences, Research Professor, Department of Information Systems, International IT University, Almaty, Kazakhstan; e-mail: l.naizabayeva@edu.iitu.kz. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4860-7376>.

Syed Abdul Rahman Al-Haddad – Professor, Department of Computer and Communication Systems Engineering, Faculty of Engineering, Universiti Putra Malaysia, UPM Serdang, Selangor, Malaysia; e-mail: sar@upm.edu.my. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5522-5096>.

Azat Kabdullin – Research Lecturer, Department of Information Systems, Satbayev University, Almaty, Kazakhstan; e-mail: a.kabdullin@satbayev.university. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5589-2542>.

Asiya Issayeva – Head of the Center for Innovation and Education, National Hospital of the Medical Center of the President's Affairs Administration of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan; e-mail: issayeva_a@snh.kz. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1673-3965>.

Сведения об авторах

Максат Кабдуллин* – Satbayev University, Алматы, Казахстан; e-mail: m.kabdullin@satbayev.university. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7320-6259>.

Лязат Найзабаева – доктор технических наук, профессор-исследователь кафедры «Информационные системы», International IT University, Алматы, Казахстан; e-mail: l.naizabayeva@edu.iitu.kz. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4860-7376>.

Syed Abdul Rahman Al-Haddad – профессор, кафедра компьютерных и коммуникационных систем, инженерный факультет, Universiti Putra Malaysia, Селангор, Малайзия; e-mail: sar@upm.edu.my. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5522-5096>.

Азат Кабдуллин – преподаватель-исследователь кафедры «Информационные системы», Satbayev University, Алматы, Казахстан; e-mail: a.kabdullin@satbayev.university. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5589-2542>.

Асия Исаева – руководитель Центра инноваций и образования, Национальный госпиталь медицинского центра Управления делами Президента РК, Алматы, Казахстан; e-mail: issayeva_a@snh.kz. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1673-3965>.

Received 02.04.2026

Revised 09.05.2026

Accepted 12.05.2026

[https://doi.org/10.53360/2788-7995-2026-2\(22\)-8](https://doi.org/10.53360/2788-7995-2026-2(22)-8)

FTAXP: 28.15.19



М.Т. Сейлханова*, Қ. Әлімхан

¹Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті,
010000, Қазақстан Республикасы, Астана қ., Сәтпаев көшесі, 2

*e-mail: mbt_kz@mail.ru

АНЫҚТАЛМАҒАН ПАРАМЕТРЛІ ЕКІНШІ РЕТТІ СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ЖҮЙЕЛЕРДІ КЕРІ ҚАДАМ ӘДІСІНЕ НЕГІЗДЕЛГЕН АДАПТИВТІ РОБАСТТЫ БАСҚАРУ

Аңдатпа: Мақалада анықталмаған параметрлі және сыртқы әсері бар сызықтық емес қатаң кері байланыс класс нысанын басқару есебі зерттеледі. Зерттеудің негізгі мақсаты – жүйенің робасттылығын қамтамасыз ететін және барлық сигналдардың кең ауқымды бірқалыпты шектелгендігін қамтамасыз ететін адаптивті басқару алгоритмін әзірлеу.

Белгісіз динамикалық функцияларды компенсациялау үшін рекурсивті синтез (backstepping) әдісі мен адаптивті аппроксимация заңдары біріктіріліп қолданылды. Тұйықталған жүйенің кең

©М.Т.Сейлханова, Қ.Әлімхан, 2026

ауқымды орнықтылығы Ляпунов функциялар әдісі арқылы аналитикалық түрде дәлелденіп, бақылау қатесінің нөлдің шектелген маңайына жинақталатыны көрсетіледі.

Зерттеу нәтижесінде анықталмаған параметрлері және шектелген сыртқы әсерлері бар екінші ретті қатаң кері байланыс түріндегі сызықтық емес жүйелер үшін басқару есебі қойылып, осы есептің адаптивті-робастты басқару арқылы шешілетіні конструктивті түрде көрсетілді. Атап айтқанда, берілген эталондық траекторияны бақылауды қамтамасыз ететін басқару заңының бар болуы backstepping әдісі негізінде енгізіліп, оны құрудың кезеңдік синтез жолы ұсынылды: алдымен виртуалды басқару құрылып, кейін адаптивті басқару заңдары анықталды. Ляпунов функциялары әдісі арқылы тұйықталған жүйенің орнықтылығы, барлық сигналдардың бірқалыпты шектелгендігі және бақылау қатесінің нөлдің шектелген маңайына жинақталуы дәлелденді. Осылайша, жұмыста тек жеке басқару алгоритмі ғана емес, анықталмаған сызықтық емес жүйелер класы үшін басқару есебінің шешілімділігін негіздейтін теориялық және конструктивті тәсіл ұсынылды.

Ұсынылған әдістің практикада тексеру мақсатында бірбуынды робот-манипулятордың динамикасына сандық модельдеу жүргізілді. Нәтижелер ұсынылған адаптивті бэкстеппинг алгоритмінің жүктеме параметрі кенет өзгерген және сыртқы әсер болған жағдайда жүйенің шектелген қозғалыс режимін сақтайтынын көрсетті. Сандық салыстыру MSE, максимал қате және орнығу уақыты көрсеткіштері бойынша жүргізіліп, басқару сапасының алгоритм параметрлерін таңдауға тәуелді екені анықталды. Бұл әдіс параметрлік белгісіздігі бар мехатроникалық және роботтандырылған жүйелерді басқару үшін қолданылуы мүмкін, алайда практикалық қолдану алдында басқару коэффициенттерін қосымша баптау қажет.

Түйін сөздер: сызықтық емес жүйе, кері байланыс (бэкстеппинг) класы, Робастты басқару, адаптивті басқару, Ляпунов функциясы, PID реттегіші.

Кіріспе

Қазіргі өнеркәсіптің қарқынды дамуында техникалық объектілерді басқару сапасына қойылатын талаптар үнемі артылуда. Жүйелердің сызықтық теориясы бүгінгі таңда жақсы зерттелгенімен, күрделі мехатрондық және роботтандырылған кешендерді басқаруда стандартты сызықтық реттегіштер көп жағдайда жеткілікті тиімді болмайды. Бұл нақты жүйелердің, атап айтқанда, ұшқышсыз ұшу аппараттарының, манипуляторлардың және суасты роботтарының айқын сызықтық емес динамикаға ие болуына, сондай-ақ сыртқы әсерлер мен анықталмаған параметрлер әсеріне ұшырауына байланысты [1-3].

Осындай объектілерді басқару есептерін шешу үшін, сызықтық емес әдістер кеңінен қолданылады. Негізгі әдістердің қатарында адаптивті басқару мен backstepping әдістері [4-7]. Олардың басты ерекшеліктері – әрбір ішкі жүйе үшін виртуалды басқару заңдарын рекурсивті түрде жобалау үдерісі; бұл басқару синтезінің күрделілігін тиімді түрде төмендетуге мүмкіндік береді [5, 8-10, 12].

Алайда, классикалық backstepping әдісінде көбіне объектінің математикалық моделін дәл білуді талап етеді [11, 12]. Осы жұмыста толық белгісіз сызықтық емес функциялар және сыртқы кедергілер болған жағдайда тұрақтылық пен басқару сапасын қамтамасыз етуге бағытталған робастты басқару есебі қарастырылады.

Мақаланың мақсаты – анықталмаған параметрлі сызықтық емес жүйелер класы үшін тұйықталған жүйенің робасттылығын және барлық сигналдарының шектелгендігін қамтамасыз ететін басқару алгоритмін құру [9, 13-15].

Есептің қойылымы мен математикалық моделі

Қатаң кері байланыс (strict-feedback form) түріндегі теңдеулермен сипатталатын белгісіз сызықтық емес жүйелер класын қарастырайық. Бұл форма жоғары ретті жүйелер (HOFA) үшін базалық болып табылады [8-10] және көптеген механикалық жүйелердің динамикасын күрделі координаталық түрлендірулерсіз сипаттауға мүмкіндік береді [1, 3, 4, 8].

Жүйе келесі теңдеулермен сипатталады:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + f_1(x_1) \\ \dot{x}_2 = gu + f_2(x_1, x_2) + d(t) \end{cases} \quad (1)$$

мұндағы, $x_1, x_2 \in R$ – жүйенің күй айнымалылары;

$u \in R$ – басқару;

f_1, f_2 – ішкі динамиканы сипаттайтын белгісіз тегіс сызықты емес функциялар [6, 7];

g – басқарудың тиімділік коэффициенті (белгілі және нөлден өзге деп ұйғарылады);

$d(t)$ – шектелген сыртқы әсер [5, 9], $|d(t)| \leq D_{max}$.

Басқарудың мақсаты: Шығу айнымалысы x_1 айнымалысының берілген $y_d(t)$ тегіс функциясы бойымен асимптотикалық бақылауды қамтамасыз ететін u басқару заңын құру, яғни, $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_1(t) - y_d(t)| \leq \varepsilon$, мұндағы ε – анықталмаған f_i және $d(t)$ сыртқы әсер бар болғандағы аз шама.

Робастты адаптивті басқаруды синтездеу

Синтез процесі екі қадамнан тұрады. Анықталмаған f_i функцияларын компенсациялау үшін, адаптивті аппроксимация әдісі пайдаланылады [6, 7, 15] (мысалы, $\hat{f} = \hat{\theta}^T \psi(x)$ сызықты параметрлендіру арқылы).

Белгісіз тегіс сызықты емес функциялар белгілі базистік функциялар векторы арқылы сызықты параметрленген түрде жуықталады деп аламыз:

$$f_i(x) = \theta_i^{*T} \psi_i(x) + \varepsilon_i(x), \quad (2)$$

мұндағы $\psi_i(x)$ – белгілі базистік функциялар векторы, θ_i^* – белгісіз нақты параметрлер векторы, ал $\varepsilon_i(x)$ – аппроксимация қателігі. Бұл қателік шектелген деп ұйғарылады:

$$|\varepsilon_i(x)| \leq \bar{\varepsilon}_i, \quad (3)$$

Бейімделу барысында белгісіз функцияның бағасы келесі түрде алынады:

$$\hat{f}_i(x) = \hat{\theta}_i^T \psi_i(x), \quad (4)$$

мұндағы $\hat{\theta}_i$ – адаптивті заңдар арқылы анықталатын параметрлер бағасы. Параметрлік бағалау қатесі:

$$\tilde{\theta}_i = \theta_i^* - \hat{\theta}_i, \quad (5)$$

түрінде анықталады. Осылайша, белгісіз динамикалық функцияның қалдық бөлігі параметрлік бағалау қатесі мен аппроксимация қатесі арқылы сипатталады:

$$f_i(x) - \hat{f}_i(x) = \tilde{\theta}_i^T \psi_i(x) + \varepsilon_i(x), \quad (6)$$

1 қадам: Орналасу циклінің тұрақтандырылуы

Бағалау қатесін анықтаймыз:

$$z_1 = x_1 - y_d \quad (7)$$

z_1 –ді туындылап келесіні аламыз:

$$\dot{z}_1 = x_2 + f_1(x_1) - \dot{y}_d \quad (8)$$

x_2 -ні виртуалды басқару ретінде қарастырамыз. z_1 -дің орнықтылығы үшін x_2 – нің қажетті түрі таңдалады (α_1 деп белгілейміз). Бірінші қадам үшін Ляпунов функциясы келесі түрде болады:

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{\gamma} \tilde{\theta}^2 \quad (9)$$

α_1 виртуалды басқаруы динамиканың белгілі бөлігін компенсациялау және қатені басу мақсатында таңдалады:

$$\bar{\alpha} = x_2 - z_2 = \dot{x}_1 - f_1(x_1) - z_2 = \dot{z}_1 + \dot{y}_d - f_1(x_1) \quad (10)$$

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 + \dot{y}_d - \hat{f}_1(x_1) \quad (11)$$

мұндағы c_1 – кері байланыс коэффициенті.

2 қадам: Қорытынды басқару заңының синтезі

Екінші ішкі жүйенің қателігін (нақты жылдамдықтың виртуалды жылдамдықтан ауытқуын) енгізейік:

$$z_2 = x_2 - \alpha_1 \quad (12)$$

Объект теңдеуін ескере отырып, z_2 қателігінің динамикасы:

$$\dot{z}_2 = gu + f_2(x_1, x_2) + d(t) - \dot{\alpha}_1 \quad (13)$$

Бүкіл жүйенің орнықтандыру үшін соңғы Ляпунов функциясын таңдайық:

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2 \quad (14)$$

V_2 -ні туындылаймыз:

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + z_2\dot{z}_2, \quad (15)$$

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 - \dot{y}_d = x_2 + f_1(x_1) - \dot{y}_d = z_2 + \alpha_1 + f_1(x_1) - \dot{y}_d \quad (16)$$

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 = gu + f_2(x_1, x_2) + d(t) - \dot{\alpha}_1, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = z_1\dot{z}_1 + z_2\dot{z}_2 = z_1(z_2 + \alpha_1 + f_1(x_1) - \dot{y}_d) + \\ + z_2(gu + f_2(x_1, x_2) + d(t) - \dot{\alpha}_1) - \frac{1}{\gamma}\dot{\tilde{\theta}}\tilde{\theta}, \end{aligned} \quad (18)$$

(12)-ні бағалап, u -ды келесі түрде аламыз:

$$u = \frac{1}{g}(-z_1 - c_2z_2 - \tilde{\theta}_2^T\psi_2(x) + \dot{\alpha}_1 - \rho\sigma(z_2)) \quad (19)$$

мұндағы, $c_2 > 0$, $\rho > 0$, ал $\sigma(z_2)$ – таңба функциясының тегістелген түрі, мысалы:

$$\sigma(z_2) = \frac{z_2}{|z_2| + \varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \quad (20)$$

Орнықтылықты талдау

Бұл бөлімнің негізгі мақсаты – ұсынылып отырған басқару заңы бақылау қатесінің нөлдің кейбір маңайына жақындауына және барлық бейімделулердің шектелуіне кепілдік беретінін дәлелдеу болып табылады [5, 9, 13].

Ляпунов функциясын таңдау: Жүйенің бүкіл жүйесі үшін жалпы Ляпунов функциясын қарастырайық [9, 11, 12]: ол күй бойынша қателіктерді және параметрлерді бағалау қателіктерін біріктіреді:

$$V(z, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_1^T\Gamma_1^{-1}\tilde{\theta}_1 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_2^T\Gamma_2^{-1}\tilde{\theta}_2 \quad (21)$$

мұндағы $\Gamma_1 = \Gamma_1^T > 0$, $\Gamma_2 = \Gamma_2^T > 0$ – адаптивті жылдамдықты анықтайтын оң анықталған матрицалар.

Оның уақыт бойынша туындысы:

$$\dot{V} = z_1\dot{z}_1 + z_2\dot{z}_2 + \tilde{\theta}_1^T\Gamma_1^{-1}\dot{\tilde{\theta}}_1 + \tilde{\theta}_2^T\Gamma_2^{-1}\dot{\tilde{\theta}}_2. \quad (22)$$

Бірінші және екінші қате динамикаларын, сондай-ақ (13) басқару заңын ескерсек, келесі өрнек алынады:

$$\dot{V} = -c_1z_1^2 - c_2z_2^2 + z_1\tilde{\theta}_1^T\psi_1 + z_2\tilde{\theta}_2^T\psi_2 + z_1\varepsilon_1 + z_2[\varepsilon_2 + d(t) - \rho\sigma(z_2)] + \tilde{\theta}_1^T\Gamma_1^{-1}\dot{\tilde{\theta}}_1 + \tilde{\theta}_2^T\Gamma_2^{-1}\dot{\tilde{\theta}}_2. \quad (23)$$

Параметрлерді бейімдеу заңдарын келесі түрде таңдаймыз:

$$\dot{\tilde{\theta}}_1 = \Gamma_1\psi_1(x)z_1, \quad (24)$$

$$\dot{\tilde{\theta}}_2 = \Gamma_2\psi_2(x)z_2. \quad (25)$$

$\tilde{\theta}_i = \theta_i^* - \hat{\theta}_i$ болғандықтан, $\dot{\tilde{\theta}}_i = -\dot{\hat{\theta}}_i$. Осы бейімдеу заңдарын $\dot{V}$ өрнегіне қойғанда параметрлік белгісіздікке қатысты мүшелер қысқарады. Нәтижесінде:

$$\dot{V} = -c_1z_1^2 - c_2z_2^2 + z_1\varepsilon_1 + z_2[\varepsilon_2 + d(t) - \rho\sigma(z_2)]. \quad (26)$$

Аппроксимация қателігі мен сыртқы әсер шектелген деп аламыз:

$$|\varepsilon_1(x)| < \bar{\varepsilon}_1, \quad (27)$$

$$|\varepsilon_2(x) + d(t)| < \Delta. \quad (28)$$

Робасттық коэффициент $\rho > \Delta$ шартымен таңдалса, онда робастты мүше сыртқы әсер мен аппроксимация қалдығының әсерін басады. Тегістелген таңба функциясы үшін:

$$z_2 \sigma(z_2) = \frac{z_2^2}{|z_2| + \varepsilon} < |z_2| - \varepsilon, \quad (29)$$

теңсіздігі орындалады. Сондықтан:

$$z_2 [\varepsilon_2(x) + d(t) - \rho \sigma(z_2)] = \frac{z_2^2}{|z_2| + \varepsilon} < -(\rho - \Delta)|z_2| + \rho \varepsilon, \quad (30)$$

Ал бірінші аппроксимация қатесіне қатысты мүше келесі түрде бағаланады:

$$z_1 \varepsilon_1(x) \leq \frac{c_1}{2} z_1^2 + \frac{\bar{\varepsilon}_1^2}{2c_1}. \quad (31)$$

Осы бағалауларды біріктірсек:

$$\dot{V} \leq -\frac{c_1}{2} z_1^2 - c_2 z_2^2 - (\rho - \Delta)|z_2| + \frac{\bar{\varepsilon}_1^2}{2c_1} + \rho \varepsilon. \quad (32)$$

Демек,

$$\dot{V} \leq -\lambda \|z\|^2 + \delta, \quad (33)$$

$$\lambda = \min \left\{ \frac{c_1}{2}, c_2 \right\}, \delta = \frac{\bar{\varepsilon}_1^2}{2c_1} + \rho \varepsilon. \quad (34)$$

Осыдан Ляпунов функциялар әдісі бойынша тұйықталған жүйенің барлық сигналдары бірқалыпты шектелген болады. Сонымен қатар z_1 және z_2 қателіктері нөлдің шектелген маңайына жинақталады. Бұл маңайдың өлшемі аппроксимация дәлдігіне, сыртқы әсердің жоғарғы шегіне және тегістеу параметрі ε -ге тәуелді.

Ляпунов бойынша орнықтылық теориясына сәйкес, осы теңсіздіктен келесі қорытынды шығады:

1. Шектелгендік: Барлық $z_1, z_2, \hat{\theta}$ сигналдары жаһандық бірқалыпты шектелген болып табылады (GUUB) [5, 13].

2. Орнықтылық: Қадағалау қателіктері z_1, z_2 көрсеткішті түрде, өлшемі c_1, c_2 тұрақтыларға тәуелді, компакт Ω_z жиынға жинақталады:

$$\Omega_z = \left\{ z: \|z\| \geq \sqrt{\frac{\delta}{\lambda}} \right\} \quad (35)$$

Ғылыми нәтижелерді талқылау

Әдістің оңтайлылығын тексеру үшін бірбуынды робот-манипулятордың динамикасы модельденді [4].

Эксперимент параметрлері:

Манипулятор динамикасының теңдеулері (жоғарыдағы жүйенің дербес жағдайы ретінде [4, 6]):

$$\ddot{q} = \frac{1}{m \cdot l^2} (u - m \cdot g \cdot l \cdot \sin(q) - k \cdot \dot{q}) + d(t) \quad (36)$$

Келесі параметрлерді қабылдайық: $l = 1$ м, $g_{acc} = 9,8$ м/с²;

Робастылықты тексеру сценарийі:

1. Эталон: $y_d(t) = 0,72 \times \sin(t)$, $\dot{y}_d(t) = 0,72 \times \cos(t)$, $\ddot{y}_d(t) = -0,72 \times \sin(t)$.

2. Жүктеменің өзгеруі: $t \in [0,5)$ аралығында гравитациялық жүктеме коэффициенті $G=9,8$, ал $t=5$ с с мезетінде $G=19,6$ мәніне дейін кенет өзгереді. Бұл жүктеменің екі есе артуын сипаттайды;

3. Сыртқы әсер: $d(t) = 0,1 \times \sin(2t)$.

Жүйенің физикалық моделі

Қарастырылып отырған басқару объектісі – бір буынды роботтық манипулятор (қатты буын), оның динамикасы қатаң кері байланыс түрінде жазылған.

Жүйенің күй теңдеулері

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = gu - 9,8 \sin(x_1) - kx_2 + d(t) \end{cases} \quad (37)$$

Физикалық түсіндірме:

x_1 – бұрыш, буынның орны;

x_2 – бұрыштық жылдамдық, буынның айналу жылдамдығы;

$9,8 \sin(x_1)$ – Гравитациялық күштің моменті (қозғалысқа кедергі келтіретін немесе оны жеңілдететін гравитациялық компонент);

kx_2 – буындағы тұтқырлық үйкеліс (энергияны шашырату);

$d(t)$ – сыртқы кедергілер (мысалы, тіреудің дірілі).

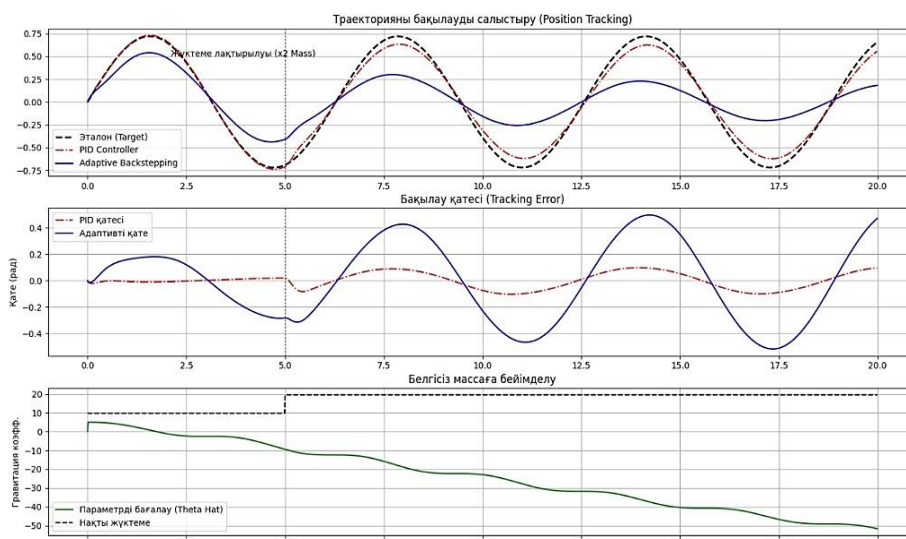
Ұсынылған адаптивті басқару заңының беріктігін (тұрақтылығын) тексеру үшін объект параметрлерінің кенет өзгеруі бар сценарий әзірленді. Эксперимент сценарийі кесте 1-де көрсетілген.

Кесте 1 – Эксперимент сценарийі

Параметр	Мән/шарт	Физикалық мағына
Бастапқы кезең ($t < 5$ с)	Масса $m=1,0$ кг	Роботтың қозғалысы, бос «қол»
Оқиға $t=5$ с	Масса $m \rightarrow 2,0$ кг	Жүкті кенеттен ұстап алу. Жүк бірден екі есе артады
Кедергі $d(t)$	$d(t) = 0,1 \times \sin(2t)$	Тұрақты, сыртқы бүкіл жол бойындағы діріл

Салыстырмалы талдау

Ұсынылған адаптивті бэкстеппинг пен классикалық PID реттегішінің салыстырмалы талдауы жүргізілді [12, 14] (сурет 1).



Сурет 1 – Салыстырмалы график

Сандық нәтижелерді нақтылау үшін бақылау қатесі келесі түрде анықталды:

$$e(t) = y_d(t) - x_1(t). \quad (38)$$

Сандық көрсеткіштер жүктеме өзгергеннен кейінгі аралықта, яғни $t \in [5; 20]$ с үшін есептелді. Орташа квадраттық қате:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^2(t_k). \quad (39)$$

Максимал қате:

$$e_{max} = \max_{t \in [5; 20]} |e(t)|. \quad (40)$$

Эталондық траектория амплитудасына қатысты максимал салыстырмалы ауытқу:

$$M_p = \frac{e_{max}}{A_d} \times 100\%. \quad (41)$$

мұндағы $A_d=0,72$. Орнығу уақыты t_s жүктеме өзгерген $t=5$ с мезетінен кейін бақылау қатесінің 2% дәлдік аймағында қалу шарты бойынша анықталды:

$$t_s = \inf\{\tau \geq 5: |e(t)| \leq 0,02A_d, \forall t \in [\tau; 20]\}. \quad (42)$$

Сандық есептеу нәтижелері 2-кестеде берілген.

Кесте 2 – Басқару әдістерінің сандық салыстырмалы көрсеткіштері

Басқару әдісі	MSE, рад ²	Максимал қате, e_{max} , рад	M_p , %
PID-реттегіш	0,00473	0,10554	14,66
Адаптивті backstepping	0,10653	0,51711	71,82

Алынған нәтижелер

Іздену дәлдігі: 2-кестеде келтірілген сандық нәтижелер бойынша берілген бағдарламалық сценарийде PID-реттегіш үшін жүктеме өзгергеннен кейінгі орташа квадраттық қате $MSE=0,00473$ рад², ал адаптивті backstepping алгоритмі үшін $MSE=0,10653$ рад² болды. Максимал бақылау қатесі PID-реттегіште 0,10554 рад, ал адаптивті басқаруда 0,51711 рад мәніне жетті.

Өтпелі үдерістің сапасы: Жүктеме коэффициенті $G=9,8$ -ден $G=19,6$ -ға т өзгергеннен кейін екі басқару әдісінде де 2% дәлдік аймағына толық орнығу 20 секундтық модельдеу аралығында байқалмады. Сондықтан орнығу уақыты екі жағдайда да $t_s > 15$ с ретінде бағаланды.

Орнықтылық: Сыртқы әсер $d(t)=0,1 \times \sin(2t)$ болған жағдайда екі басқару жүйесі де шектелген қозғалыс режимінде қалды. Сонымен қатар алынған сандық нәтижелер адаптивті backstepping алгоритмінің нақты сапасы c_1 , c_2 , γ және бастапқы $\hat{\theta}(0)$ мәндерін таңдауға тәуелді екенін көрсетеді. Осыған байланысты сандық модельдеу нәтижелері тек сапалық графикпен емес, MSE, максимал қате, салыстырмалы ауытқу және орнығу уақыты сияқты нақты көрсеткіштер арқылы берілді.

Қорытынды

Жүргізілген ғылыми зерттеу жұмысының нәтижесінде келесідей тұжырымдар жасалды:

–Алгоритмдік жаңашылдық: Қатаң кері байланыс түріндегі сызықтық емес жүйелер үшін адаптивті backstepping әдісіне негізделген робастты басқару заңы құрылды. Бұл алгоритм жүйедегі белгісіздіктер мен сыртқы әсерлерді нақты уақыт режимінде бақылауға және олардың әсерін өтеуге мүмкіндік береді.

–Теориялық негіздеме: Ляпунов функциялары әдісін қолдану арқылы тұйықталған жүйенің орнықтылығы мен барлық күй айнымалыларының шектелгендігі математикалық тұрғыдан дәлелденді. Басқару заңындағы робастты құраушы мен сыртқы әсерін жоятын тегістелген функцияның қолданылуы жүйе сапасын арттырды.

–Робот-манипулятор моделінде жүргізілген сандық эксперименттер ұсынылған әдістің анықталмаған параметрлер және сыртқы әсер жағдайында жұмыс қабілеттілігін сақтайтынын көрсетті. Жүктеме кенеттен өзгерген кезде жүйе шектелген қозғалыс режимінде қалды, ал MSE, максимал қате және орнығу уақыты бойынша алынған нақты мәндер басқару сапасының алгоритм параметрлерін таңдауға тәуелді екенін көрсетті. Сондықтан ұсынылған әдіс параметрлік белгісіздігі бар мехатроникалық жүйелерде қолданылуы мүмкін, алайда практикалық іске асыру алдында басқару коэффициенттерін қосымша баптау қажет.

–Болашақ бағыттар: Зерттеу нәтижелері априорлық белгісіздік жағдайында жұмыс істейтін өнеркәсіптік роботтардың басқару жүйелерін жетілдіруге негіз болады. Алдағы уақытта бұл әдісті жүйенің толық күйі белгісіз (жылдамдық өлшенбейтін) жағдайлар үшін бақылаушы құру арқылы кеңейту жоспарлануда.

Әдебиеттер

1. Robust output control of twin rotor nonlinear multichannel object / S.A. Vrazhevsky et al // Journal of Instrument Engineering. – 2018. – Vol. 61, № 1. – P. 32-40.

2. Unmanned aerial vehicles: control methods and future challenges / Z. Zuo et al // IEEE/CAA J. Autom. Sinica. – 2022. – Vol. 9. – P. 601-614.
3. Boundary control of a rotating and length-varying flexible robotic manipulator system / Y. Liu et al // IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Syst. – 2022. – Vol. 52. – P. 377-386.
4. Adaptive backstepping control of high-order fully actuated nonlinear systems with event-triggered strategy / C. Yan et al // Intelligence & Robotics. – 2023. – Vol. 3(2). – P. 176-189.
5. Wen G. Simplified optimized backstepping control for a class of nonlinear strict-feedback systems with unknown dynamic functions / G. Wen, C. Chen, S. Ge // IEEE Trans. Cybern. – 2021. – Vol. 51. – P. 4567-4580.
6. Backstepping-Based adaptive control of a class of uncertain incommensurate fractional-order nonlinear systems / X. Li et al // IEEE Trans. Ind. Electron. – 2022. – Vol. 69. – P. 4087-4095.
7. Adaptive Backstepping Terminal Sliding Mode Control of Nonlinear System Using Fuzzy Neural Structure / X. Gong et al // Mathematics. – 2023. – Vol. 11(5). – P. 1094.
8. Duan G. High-order fully actuated system approaches: Part I. Models and basic procedure / G. Duan // Int. J. Syst. Sci. – 2021. – Vol. 52. – P. 422-435.
9. Duan G. High-order fully actuated system approaches: Part III. Robust control and high-order backstepping / G. Duan // Int. J. Syst. Sci. – 2021. – Vol. 52. – P. 952-971.
10. Adaptive Fixed-Time Control of Strict-Feedback High-Order Nonlinear Systems / Y. Li et al // Entropy. – 2021. – Vol. 23(8). – P. 963.
11. Khalil H.K. Nonlinear Systems., 3rd ed. / H.K. Khalil // Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.
12. Slotine J.J.E., Li W. Applied Nonlinear Control., NJ: Prentice-Hall, 1991.
13. Hou Z. On model-free adaptive control and its stability analysis / Z. Hou, S. Xiong // IEEE Trans. Automat. Contr. – 2019. – Vol. 64. – P. 4555-4569.
14. Duan G. High-order fully actuated system approaches: Part V. Robust adaptive control / G. Duan // Int. J. Syst. Sci. – 2021. – Vol. 52. – P. 2129-2143.
15. Utkin V.I. Sliding Modes in Control and Optimization., Berlin: Springer-Verlag, 1992.

М.Т. Сейлханова*, Қ. Әлімхан

¹Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті,
010000, Қазақстан Республикасы, Астана қ., Сәтпаев көшесі, 2
*e-mail: mbt_kz@mail.ru

АДАПТИВНОЕ РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

В статье исследуется проблема управления нелинейным жестким объектом класса обратной связи с неопределенными параметрами и внешними воздействиями. Основная цель исследования – разработка адаптивного алгоритма управления, обеспечивающего робастность системы и гарантирующего крупномасштабное равномерное ограничение всех сигналов.

Для компенсации неизвестных динамических функций используется метод рекурсивного синтеза (бэкстеппинга) и законы адаптивной аппроксимации в сочетании. Крупномасштабная устойчивость замкнутой системы доказана аналитически с использованием метода функций Ляпунова, и показано, что ошибка управления сходится к ограниченной окрестности нуля.

В результате исследования была сформулирована задача управления для нелинейных систем второго порядка со строгой обратной связью, неопределенными параметрами и ограниченными внешними воздействиями, и конструктивно показано, что эта задача может быть решена с помощью адаптивно-робастного управления. В частности, на основе метода обратной связи было введено существование закона управления, обеспечивающего управление заданной эталонной траекторией, и предложен пошаговый метод его создания: сначала создавалось виртуальное управление, а затем определялись адаптивные законы управления. Устойчивость замкнутой системы, равномерная ограниченность всех сигналов и сходимость ошибки управления к ограниченной окрестности нуля были доказаны с помощью метода функций Ляпунова. Таким образом, в работе представлен не только отдельный алгоритм управления, но и теоретический и конструктивный подход, обосновывающий разрешимость задачи управления для класса неопределенных нелинейных систем.

Для проверки предложенного метода на практике было проведено численное моделирование динамики одно суставного робота-манипулятора. Результаты показали, что предложенный

адаптивный алгоритм обратной связи поддерживает ограниченный режим движения системы в случае внезапного изменения параметра нагрузки и наличия внешних воздействий. Было проведено численное сравнение показателей среднеквадратичной ошибки (MSE), максимальной ошибки и времени установления, и было установлено, что качество управления зависит от выбора параметров алгоритма. Этот метод может быть использован для управления мехатронными и роботизированными системами с неопределенностью параметров, но перед практическим применением требуется дополнительная настройка коэффициентов управления.

Ключевые слова: нелинейная система, класс обратной связи, робастное управление, адаптивное управление, функция Ляпунова, PID-регулятор.

M. Seilkhanova*, K. Alimhan

¹L.N. Gumilyov Eurasian National University,
010000, Republic of Kazakhstan, Astana, Satpayev Street, 2

*e-mail: mbt_kz@mail.ru

ADAPTIVE ROBUST CONTROL OF SECOND-ORDER NONLINEAR SYSTEMS WITH UNDETERMINED PARAMETERS BASED ON THE BACKSTEPPING METHOD

The article investigates the control problem for a class of nonlinear strict-feedback systems with uncertain parameters and external disturbances. The main objective of the study is to develop an adaptive control algorithm that ensures system robustness and guarantees semi-global uniform boundedness of all signals.

To compensate for unknown dynamic functions, the recursive synthesis method, namely backstepping, is combined with adaptive approximation laws. The semi-global stability of the closed-loop system is analytically proven using the Lyapunov function method, and it is shown that the tracking error converges to a bounded neighborhood of zero.

As a result of the study, the control problem is formulated for second-order nonlinear strict-feedback systems with uncertain parameters and bounded external disturbances, and it is constructively demonstrated that this problem can be solved by means of adaptive robust control. In particular, the existence of a control law ensuring tracking of a given reference trajectory is established on the basis of the backstepping method, and a step-by-step synthesis procedure for its construction is proposed: first, a virtual control is designed, and then adaptive control laws are defined. Using the Lyapunov function method, the stability of the closed-loop system, the uniform boundedness of all signals, and the convergence of the tracking error to a bounded neighborhood of zero are proven. Thus, the work proposes not only a specific control algorithm, but also a theoretical and constructive approach that substantiates the solvability of the control problem for a class of uncertain nonlinear systems.

To verify the proposed method in practice, numerical simulation was carried out for the dynamics of a single-link robotic manipulator. The results showed that the proposed adaptive backstepping algorithm preserves the bounded motion mode of the system under sudden changes in the load parameter and in the presence of external disturbances. A numerical comparison was performed using the MSE, maximum error, and settling time criteria, and it was found that the control performance depends on the choice of algorithm parameters. The proposed method can be applied to the control of mechatronic and robotic systems with parametric uncertainty; however, additional tuning of the control gains is required before practical implementation.

Key words: nonlinear system, feedback class, robust control, adaptive control, Lyapunov function, PID controller.

Авторлар туралы мәліметтер

Молдир Трусбековна Сейлханова* – магистр, «Математикалық және компьютерлік моделдеу» кафедрасының докторанты, Л.Н.Гумилев Еуразия ұлттық университеті, Қазақстан; e-mail: mbt_kz@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-5282-700X>.

Қилан Әлімхан – PhD, «Математикалық және компьютерлік моделдеу» кафедрасының профессоры, Л.Н.Гумилев Еуразия ұлттық университеті, Қазақстан; e-mail: keylan@live.jp. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0766-2229>.

Сведения об авторах

Молдир Трусбековна Сейлханова* – магистр, докторант кафедры «Математическое и компьютерное моделирование», Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилёва, Казахстан; e-mail: mbt_kz@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-5282-700X>.

Қилан Әлімхан – PhD, профессор кафедры «Математическое и компьютерное моделирование»; Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилёва, Казахстан; e-mail: keylan@live.jp. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0766-2229>.

Information about the authors

Moldir Seilkhanova* – Master's degree, doctoral student of the Department of Mathematical and Computer Modeling, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazakhstan; e-mail: mbt_kz@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-5282-700X>.

Keylan Alimhan – PhD, Professor of the Department of Mathematical and Computer Modeling, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazakhstan; e-mail: keylan@live.jp. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0766-2229>.

Редакцияға енуі 30.03.2026

Өңдеуден кейін түсуі 14.05.2026

Жариялауға қабылданды 15.05.2026

[https://doi.org/10.53360/2788-7995-2026-2\(22\)-9](https://doi.org/10.53360/2788-7995-2026-2(22)-9)



FTAXP: 28.23.27

**Д.Ж. Шырынханова¹, И.Б. Карымсакова², Г. Жомартқызы¹, Д.О. Кожаметова²,
Т.А. Устинова²**

¹Д. Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университеті,
070004, Қазақстан Республикасы, Өскемен қ., Серікбаев көшесі, 19

²Шәкәрім университеті,
071412, Қазақстан Республикасы, Семей қ., Глинка көшесі, 20 А

*e-mail: karymsakova.indira@mail.ru

МАШИНАЛЫҚ ОҚЫТУ (ML) МОДЕЛЬДЕРІН ҚОЛДАНА ОТЫРЫП БАУЫР ҚАТЕРЛІ ІСІГІН БОЛЖАУ

Аңдатпа: Ашық қолжетімді құрылымдалған клиникалық деректер негізінде бауыр қатерлі ісігі қаупін болжауға арналған машиналық оқыту модельдері салыстырмалы түрде бағаланды. Зерттеуде Kaggle платформасынан алынған деректер жиынтығы қолданылды ($N=5000$): мақсатты айнымалы Liver_cancer, 13 белгі (9 сандық, 4 категориялық), кластар теңгерімсіз (0: 78,22%, 1: 21,78%). Деректерді алдын ала өңдеу, модельдерді үйрету және бағалау кезеңдері бірыңғай эксперименттік протокол шеңберінде орындалды. Сандық айнымалылар стандарттау арқылы нормаланды; категориялық айнымалылар бинарлы форматта кодталды.

Салыстырмалы талдауға логистикалық регрессия (Logistic Regression), тірек векторлар әдісі (Support Vector Machine, RBF ядросымен), k ең жақын көршілер (k -Nearest Neighbors), кездейсоқ орман (Random Forest) және градиенттік бустинг (Gradient Boosting) модельдері енгізілді. Барлық модельдер дәлдік (accuracy), нақтылық (precision), сезімталдық (recall/sensitivity), ерекшелік (specificity), $F1$ -өлшемі ($F1$ -score) және ROC қисығы астындағы аудан (ROC-AUC) көрсеткіштері бойынша бағаланды.

Нәтижелер бойынша градиенттік бустинг (Gradient Boosting) ең жоғары жиынтық тиімділікті көрсетті: ROC-AUC=0.999498, Accuracy=0.9754, Precision=0.998967, Sensitivity=0.887971, Specificity=0.999744, $F1$ =0.940204. Салыстыру деректерінде SVM (RBF) және Random Forest тұрақты дискриминация бергенімен, сезімталдық пен $F1$ бойынша Gradient Boosting-мен төмен болды. Жұмыстың нәтижелері құрылымдалған клиникалық белгілер негізінде модель таңдауда метрикалардың кешенді талдауы қажет екенін көрсетеді; шектеулер ретінде деректердің теңгерімсіздігі және сыртқы валидацияның болмауы атап өтіледі.

Түйін сөздер: бауыр қатерлі ісігі, құрылымдалған клиникалық деректер, машиналық оқыту, градиенттік бустинг, салыстырмалы талдау, ROC-AUC, сезімталдық, ерекшелік.

Кіріспе

Бауыр қатерлі ісігі (бауыр ісігінің ең жиі түрі – гепатоцеллюлярлық карцинома, HCC) әлемдік деңгейде өзектілігі жоғары аурулардың қатарына жатады. Халықаралық онкологиялық деректерге сүйенсек, 2022 жылы дүние жүзінде бауыр қатерлі ісігінің шамамен 866 мыңға жуық жаңа жағдайы тіркеліп, оған байланысты 758 мыңнан астам өлім тіркелген [1]. Бауыр ісіктерінің