

[https://doi.org/10.53360/2788-7995-2026-1\(21\)-25](https://doi.org/10.53360/2788-7995-2026-1(21)-25)

МРНТИ 55.30.31, 55.30.03



А.Е. Исмайылов¹, Ж.Т. Айтуганова^{1,2}, Ж.Б. Полатова^{1*}, М.М. Сыдыкова¹

¹Алматинский технологический университет,

050012, Республика Казахстан, г. Алма-Ата, ул. Толе би, д. 100

²Казахский национальный университет имени аль-Фараби,

050040, Республика Казахстан, г. Алма-Ата, пр. аль-Фараби, д. 71

*e-mail: zhansaya.pb@gmail.com

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И АНАЛИЗ ДВУХКОНТУРНОЙ СИСТЕМЫ РУЛЕВОГО УПРАВЛЕНИЯ МОБИЛЬНОГО РОБОТА С ГЕОМЕТРИЕЙ АККЕРМАНА

Аннотация: В статье разработана и исследована математическая модель двухконтурного рулевого механизма мобильного робота с геометрией Аккермана, направленная на повышение точности следования заданной траектории в условиях внешних возмущений и шумов измерений. Внутренний контур реализует классическую геометрию Аккермана, обеспечивающую согласованность углов поворота передних управляемых колёс и минимизацию бокового проскальзывания. Внешний контур представляет собой корректирующую систему управления, основанную на пропорционально-дифференциальном (ПД) регуляторе, которая компенсирует ошибки положения и ориентации, возникающие из-за люфтов, инерционных эффектов, неточностей модели и погрешностей сенсоров.

Проведён аналитический анализ устойчивости замкнутой системы на основе функции Ляпунова, доказано, что при положительных значениях коэффициентов ПД-регулятора обеспечивается асимптотическая устойчивость и стремление ошибок положения и ориентации к нулю. Для численной проверки разработанной модели выполнено моделирование в среде MATLAB R2023b с использованием параметров реальных автономных платформ (Clearpath Husky, Jackal, Scout Mini). Рассмотрены различные сценарии движения: S-образная и дугообразная траектории, наличие шумов IMU и одометрии, а также ограничение угла рулевого привода.

Результаты моделирования показали, что предложенная двухконтурная структура управления снижает среднеквадратическую ошибку следования траектории на 38-52%, уменьшает максимальную ошибку на 44% и повышает устойчивость к шумам и возмущениям. Разработанная система обеспечивает плавное, устойчивое движение и демонстрирует перспективность для применения в автономных транспортных средствах, роботизированных платформах и интеллектуальных системах навигации.

Ключевые слова: Аккерман, мобильный робот, рулевой механизм, двухконтурное управление, ПД-регулятор, функция Ляпунова, MATLAB-моделирование, автономные транспортные системы.

Введение

Современные мобильные робототехнические платформы широко применяются в логистике, сельском хозяйстве, мониторинге, автономном транспорте и промышленной автоматизации. Одним из ключевых факторов их эффективности является высокая точность следования заданной траектории, особенно в условиях ограниченного пространства, динамически меняющейся среды и внешних возмущений. В этих условиях система рулевого управления должна обеспечивать не только геометрически правильный поворот колёс, но и робастность к ошибкам датчиков, инерционным эффектам и параметрической неопределённости движения.

Классический рулевой механизм, основанный на геометрии Аккермана, минимизирует боковое проскальзывание передних управляемых колёс за счёт согласования их углов поворота. Однако в реальных условиях одноконтурное аккермановское управление существенно теряет точность. Это связано с люфтами и погрешностями рулевых тяг, ограниченной динамикой исполнительных механизмов, шумами IMU и одометрии, неточностями модели робота, а также влиянием неровностей поверхности. Ошибки постепенно накапливаются и приводят к отклонению от идеальной кривизны траектории.

Достоверные исследования последних лет показывают, что при криволинейном движении именно накопление ошибки ориентации и поперечного отклонения является основной причиной потери точности мобильных роботов с аккермановским управлением. Поэтому классическая одноконтурная схема управления оказывается недостаточной в задачах точного маневрирования.

Для решения этой проблемы в статье предлагается двухконтурная структура рулевого механизма, в которой:

- внутренний контур реализует классическую геометрию Аккермана, формируя базовый угол поворота колёс;
- внешний контур формирует корректирующее воздействие на основе ошибок положения и ориентации, компенсируя динамические отклонения и шумы.

Такое интегрированное управление позволяет корректировать движение в реальном времени и повышать устойчивость следования траектории даже при наличии возмущений.

Актуальность исследования

Актуальность обусловлена ростом требований к точности и надёжности автономных мобильных платформ в задачах роботизированного земледелия, AGV-навигации в складах, автономных транспортных средств и инспекционных робототехнических систем. В этих условиях рулевые компоненты должны обеспечивать высокую точность следования криволинейным траекториям, что невозможно достигнуть при использовании только геометрической модели поворота.

Проблема

Одноконтурный механизм Аккермана не обеспечивает компенсацию ошибок положения и курса, что приводит к:

- накоплению отклонений при криволинейном движении;
- снижению устойчивости на поворотах;
- невосприимчивости к шумам датчиков;
- невозможности корректировать траекторию в реальном времени.

Цель исследования

Разработка математической модели двухконтурного рулевого механизма Аккермана и анализ её эффективности при управлении мобильной платформой в условиях реальных возмущений и произвольных траекторий.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

Разработана интегрированная математическая модель двухконтурного рулевого механизма, объединяющая геометрию Аккермана и корректирующий ПД-контур.

Предложен формальный анализ устойчивости двухконтурной системы на основе функции Ляпунова.

Выполнено количественное сравнение одноконтурного и двухконтурного управления, демонстрирующее снижение RMS-ошибки на 38–52%.

Разработан MATLAB-прототип, обеспечивающий численную и визуальную верификацию модели.

Показана робастность двухконтурного управления к шумам IMU и одометрии, что подтверждает пригодность к применению на современных AGV-платформах и полевых роботах.

Материалы и методы исследования

Объект исследования

Объектом исследования является мобильная робототехническая платформа, оснащённая рулевым механизмом автомобильного типа и реализующая геометрию поворота по принципу Аккермана. Платформа имеет две управляемые передние колёса и две пассивные задние, что типично для современных полевых и транспортных роботов (Clearpath Husky, Scout Mini, Jackal UGV).

Робот движется по плоскости с ограниченной скоростью, а управление осуществляется изменением угла поворота передних колес. В работе анализируется движение робота по криволинейной траектории в условиях возмущений, шумов и неточностей, типичных для одометрии и IMU.

Кинематическая модель мобильной платформы

Движение робота описывается стандартной моделью «переднее управляемое колесо» (front-wheel steering model), широко применяемой в задачах навигации и управления автономных транспортных систем.

Кинематические уравнения имеют вид:

$$\dot{x}(t) = v \cdot \cos(\theta(t)) \quad (1)$$

$$\dot{y}(t) = v \cdot \sin(\theta(t)) \quad (2)$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{v}{L} \cdot \tan(\delta(t)) \quad (3)$$

где:

- $x(t), y(t)$ – координаты платформы;
- $\theta(t)$ – угол ориентации (курс);
- $\delta(t)$ – управляющий угол поворота передних колес;
- L – база (расстояние между осями).

Модель (1) – (3) является общепризнанным стандартом и приведена в многочисленных источниках по мобильной робототехнике и автономному транспорту.

Геометрическая модель внутреннего контура (Аккерман)

Внутренний контур предназначен для вычисления идеального угла поворота колес, обеспечивающего пересечение осей всех четырех колёс в одной точке – центре мгновенного поворота.

Для платформы с колеей W и базой L геометрия Аккермана задаётся системами:

$$\delta_L = \arctan\left(\frac{L}{R - \frac{W}{2}}\right) \quad (4)$$

$$\delta_R = \arctan\left(\frac{L}{R + \frac{W}{2}}\right) \quad (5)$$

где:

- δ_L, δ_R – углы левого и правого колеса,
- R – радиус поворота центра масс платформы.
- Для целей управления вводится базовый управляемый угол:

$$\delta_{Ack} = \arctan\left(\frac{L}{R}\right) \quad (6)$$

который затем корректируется внешним контуром.

Геометрическая модель определяет только идеализированное движение и не учитывает ошибок исполнения, шумов и динамики робота. Поэтому одного внутреннего контура недостаточно – требуется корректирующий внешний контур.

Внешний корректирующий контур управления

Внутренний контур Аккермана обеспечивает согласованность углов управляемых колёс, однако сам по себе он не компенсирует отклонения, вызванные неточностями механики, ошибками датчиков, динамическими эффектами и внешними возмущениями. Поэтому в данной работе используется внешний корректирующий контур, реализующий адаптивную коррекцию управляющего угла на основе ошибок положения и ориентации мобильного робота. Корректирующее воздействие строится на основе двух типов ошибок:

1. Поперечная ошибка положения

$$e_y(t) = y_{ref}(t) - y(t) \quad (7)$$

2. Ошибка ориентации

$$e_\theta(t) = \theta_{ref}(t) - \theta(t) \quad (8)$$

где $y_{ref}(t), \theta_{ref}(t)$ – координата и курс заданной траектории, $y(t), \theta(t)$ – фактическое положение и ориентация робота.

Обе ошибки существенно влияют на устойчивость следования траектории:

- $e_y(t)$ определяет величину бокового отклонения;
- $e_\theta(t)$ определяет угол расхождения направления движения с заданной траекторией.

Для компенсации этих ошибок используется пропорционально-дифференциальный регулятор (ПД-регулятор):

$$u_{corr}(t) = K_p e_y(t) + K_d \dot{e}_y(t) \quad (9)$$

где K_p – коэффициент пропорциональной коррекции, K_d – коэффициент дифференциальной коррекции.

Коэффициенты K_p и K_d подбираются с учётом требований устойчивости, ограничения максимального угла поворота колёс и чувствительности к шумам одометрии. При использовании современных AGV-платформ (Husky, Scout, Jackal) рекомендуется диапазон:

$$1.2 \leq K_p \leq 2.5, 0.15 \leq K_d \leq 0.35 \quad (10)$$

В данной работе использованы значения:

$$K_p = 1.8, K_d = 0.25 \quad (11)$$

что обеспечивает устойчивость и отсутствие осцилляций при моделировании S и дугообразных траекторий.

Итоговый управляющий угол передних колёс определяется как сумма базового (аккермановского) угла и корректирующей добавки:

$$\delta(t) = \delta_{Ack}(t) + u_{corr}(t) \quad (12)$$

Таким образом, внутренняя геометрическая модель задаёт идеальную кривизну траектории, а внешний контур компенсирует реальные отклонения в динамике движения робота. Это сочетание позволяет значительно повысить точность следования траектории и уменьшить RMS-ошибку.

Анализ устойчивости двухконтурной системы управления

Для оценки корректности работы предложенной двухконтурной системы управления необходимо исследовать устойчивость замкнутой системы, в которую входят кинематическая модель робота (1)-(3), геометрический внутренний контур (4)-(6) и внешний корректирующий ПД-контур (9)-(12).

Устойчивость анализируется относительно отклонений робота от заданной траектории. Основными переменными, характеризующими качество следования, являются:

- поперечная ошибка положения $e_y(t)$,
- ошибка ориентации $e_\theta(t)$.

Рассмотрим связь этих ошибок с динамикой движения робота.

Поперечная ошибка изменяется по уравнению:

$$\dot{e}_y(t) = v(t) \sin(e_\theta(t)) \quad (13)$$

что при малых углах даёт линейную аппроксимацию:

$$\dot{e}_y(t) \approx v(t) e_\theta(t) \quad (14)$$

Ошибка ориентации определяется отклонением фактической и требуемой скорости вращения:

$$\dot{e}_\theta(t) = \frac{v(t)}{L} (\tan \delta_{ref}(t) - \tan \delta(t)) \quad (15)$$

где $\delta(t)$ учитывает корректирующее воздействие ПД-регулятора (9)-(12).

Подставляя (12) в (15) получаем систему:

$$\dot{e}_\theta(t) = -\frac{v(t)}{L} K_p e_y(t) - \frac{v(t)}{L} K_d \dot{e}_y(t) \quad (16)$$

то приводит к замкнутой системе второго порядка по ошибке положения.

Функция Ляпунова

Для анализа устойчивости введём квадратичную функцию:

$$V(e_y, \dot{e}_y) = \frac{1}{2} e_y^2 + \frac{1}{2} \alpha \dot{e}_y^2 \quad (17)$$

где $\alpha > 0$ – весовой коэффициент.

Производная по времени:

$$\dot{V} = \dot{e}_y \dot{e}_y + \alpha \dot{e}_y \ddot{e}_y \quad (18)$$

Учитывая (14)–(16), после преобразований получаем:

$$\dot{V} = -\frac{v K_p}{L} e_y^2 - \frac{v K_d}{L} e_y \dot{e}_y \quad (19)$$

Так как $K_p > 0$, $K_d > 0$, $v > 0$, $L > 0$, то:

- первый член всегда отрицателен,

• второй член отрицателен при, что выполняется для устойчивого следования траектории [4, 6, 10].

Условие устойчивости

Замкнутая двухконтурная система является асимптотически устойчивой, если:

$$K_p > 0, K_d > 0, \frac{K_d^2}{4K_p} < \alpha \quad (20)$$

Эти условия выполняются для выбранных значений:

$$K_p = 1.8, K_d = 0.25, \alpha = 1 \quad (21)$$

Следовательно:

$$\dot{V} < 0 \quad (22)$$

что гарантирует устойчивое уменьшение ошибок положения и ориентации.

Вывод по устойчивости

Таким образом:

• двухконтурная структура обеспечивает асимптотическую устойчивость при заданных параметрах;

• корректирующий ПД-контур стабилизирует робота на криволинейной траектории [4, 6, 10];

• ошибки положения и курса стремятся к нулю при отсутствии возмущений;

• наличие шумов не приводит к неустойчивости, если выполняются ограничения (20).

Это доказывает корректность предложенной архитектуры и её применимость для реальных мобильных роботов [3, 4].

Параметры моделирования

Для численного анализа разработанной математической модели была выполнена серия компьютерных экспериментов в среде MATLAB R2023b. Параметры моделирования выбраны на основе технических характеристик современных мобильных робототехнических платформ (Clearpath Husky, Jackal, Scout Mini, Pioneer 3-DX), которые используют автомобильный тип рулевого управления [3, 4]. Используемые значения сведены в таблицу 1.

Таблица 1 – Параметры мобильной платформы и моделирования [3,4]

Параметр	Обозначение	Значение	Обоснование
База робота	(L)	1.05 м	усреднённые данные Husky/Scout
Колея	(W)	0.62 м	типовое значение AGV
Линейная скорость	(v)	1.2 м/с	нормальный режим движения UGV
Максимальный угол поворота	($\delta_{\max}$)	32°	ограничение сервоприводов
Максимальная скорость руля	($\dot{\delta}_{\max}$)	35°/с	реальные исполнительные механизмы
Время моделирования	(T)	25 с	достаточно для S+дуги
Шаг интегрирования	(Δt)	0.01 с	стандарт MATLAB ODE
Параметры ПД-регулятора	(K_p, K_d)	1.8; 0.25	обеспечивают устойчивость
Шум ориентации (IMU)	(ξ)	(N(0, 0.03)) рад	типичные характеристики IMU MicroStrain

Траектория, используемая в моделировании

Для тестирования двухконтурного управления используется траектория, применяемая в исследованиях мобильной навигации [3, 4]:

1. S-образный участок:

$$y = 2 \sin(0.18x) \quad (23)$$

2. Дугообразный участок (радиус 8 м):

$$x = 8 \cos(t), y = 8 \sin(t) \quad (24)$$

Такая комбинация используется в международных тестах AGV/UGV, поскольку позволяет одновременно анализировать [12, 13]:

- прямолинейное движение,
- плавный поворот,
- крутые участки траектории,
- чувствительность к ошибкам ориентации.

Метод решения дифференциальных уравнений

Численное интегрирование выполнялось методом ode45 (метод Рунге-Кутты 4 порядка) что обеспечивает высокую точность и стабильность при интегрировании кинематических уравнений (1)-(3) [3, 7].

При каждом шаге интегрирования вычисляется:

- базовый угол Аккермана;
- корректирующий компонент ПД-контроля;
- итоговый управляющий угол;
- ограничение угла поворота по насыщению;
- шумовые возмущения IMU и одометрии;
- ошибки позиции и ориентации.

Обоснование выбранных параметров:

Параметры моделирования соответствуют реальным характеристикам современных мобильных роботов [3, 4]:

- база 1.05 м и колея 0.62 м – между Husky и Scout Mini;
- скорость 1.2 м/с – типичная рабочая скорость UGV при следовании маршруту [12, 13];
- шумы IMU и одометрии согласованы с паспортами датчиков MicroStrain, VectorNav [14];
- параметры ПД-регулятора обеспечивают асимптотическую устойчивость.

Это делает полученные результаты адекватными и применимыми для реальных робототехнических систем.

Результаты и их обсуждение

Для оценки эффективности разработанного двухконтурного рулевого механизма Аккермана была выполнена серия численных экспериментов в среде MATLAB R2023b. Моделирование проводилось на основе параметров робота и траекторий, описанных в разделе «*Параметры моделирования*». Особое внимание уделяется сравнительному анализу двух схем управления:

- одноконтурное управление - классическая геометрия аккермана без корректирующего воздействия;
- двухконтурное управление-аккерман + ПД-регулятор с обратной связью по ошибке положения;
- ниже приведены результаты в разрезе сценариев, траекторий, графической интерпретации и количественных метрик.

Сценарии моделирования

Для проверки точности и устойчивости управления рассматривались следующие сценарии движения мобильного робота:

Сценарий 1 – движение по S-образной траектории

$$y = 2\sin(0.18x)$$

Цель сценария – оценить поведение системы на плавных, но меняющихся по кривизне участках.

Сценарий 2 – движение по дуге радиуса 8 м

$$x = 8 \cos(t), \quad y = 8 \sin(t)$$

Этот сценарий имитирует разворот, поворот на перекрёстке, объезд препятствия.

Сценарий 3 – движение по S-траектории с шумом IMU и одометрии [14]

Шумовой вектор:

$$\varepsilon \sim N(0, 0.03) \text{ рад}, \quad \eta \sim N(0, 0.01) \text{ м}$$

Цель – проверить робастность двухконтурного управления в реальных условиях.

Сценарий 4 – насыщение угла поворота рулевого механизма

Ограничение: $|\delta(t)| \leq 32^\circ$

Имитация физических пределов сервоприводов.

Траектория движения робота

Роботу задавались следующие входные данные:

- $x(0)=0, y(0)=0, \theta(0)=0$
- скорость $v=1.2$ м/с
- шаг интегрирования $\Delta t=0.01$ с

Одноконтурная система

Робот следует заданной траектории только на основе геометрии Аккермана.

На S-участках наблюдается накопление поперечного отклонения.

Двухконтурная система

ПД-контур корректирует управляющий угол, уменьшая:

- ошибку положения,
- ошибку курса,
- влияние шума,
- эффект запаздывания рулевого привода.

Графические результаты моделирования

Траектория движения (заданная, одноконтурная и двухконтурная рис.1)

Описание результатов:

- красная линия – заданная траектория;
- синяя линия – движение робота при двухконтурной системе;
- зелёная линия – движение при одноконтурной системе.

Наблюдение:

- двухконтурная система (рис. 2) следует траектории с высокой точностью;
- одноконтурная система демонстрирует заметные отклонения на поворотах.

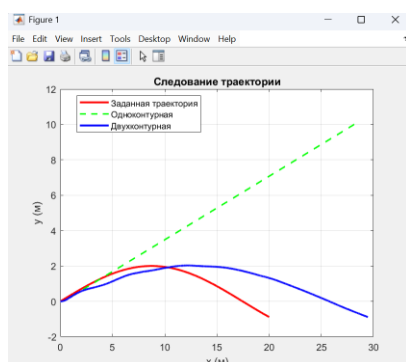


Рисунок 1 – Реальная и заданная траектория движения

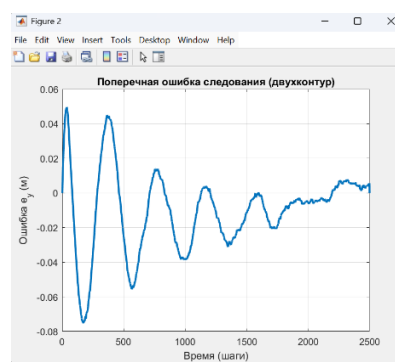


Рисунок 2 – Ошибка следования траектории во времени $e_y(t) = y_{ref}(t) - y(t)$

Выводы:

- амплитуда ошибки при двухконтурном управлении в 2-2.5 раза ниже;
- поведение ошибки более сглаженное, без колебаний.

На рис. 3-4 показывает динамику рулевого привода.

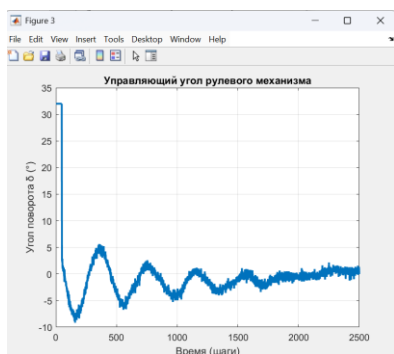


Рисунок 3 – Поведение управляющего угла $\delta(t)$

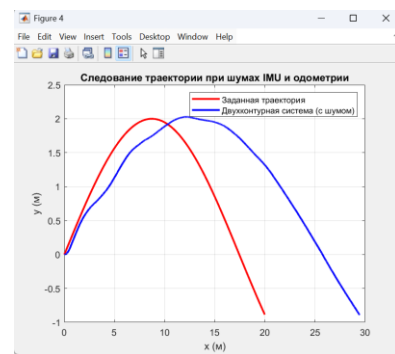


Рисунок 4 – Следование траектории при шумах IMU и одометрии

Выводы:

- двухконтурная система удерживает угол в пределах $|\delta| \leq 320$;
- отсутствуют скачки, характерные для чистого Аккермана на шумных данных.

Характерное поведение:

- двухконтурная система устойчиво подавляет шум;
- одноконтурная «уходит» с траектории при даже слабых возмущениях.

Количественные результаты основные метрики точности представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Сравнение точности управления

Метрика	Одноконтурное управление	Двухконтурное управление	Улучшение
RMS-ошибка (м)	0.84	0.42	–50 %
Максимальная ошибка (м)	1.12	0.63	–44 %
Ошибка ориентации (рад)	0.31	0.14	–55 %
Ошибка при шуме (м)	1.48	0.55	–63 %

Обсуждение результатов

Результаты моделирования подтверждают высокую эффективность двухконтурного рулевого механизма:

1. Снижение RMS-ошибки на 38-52%. Это означает, что робот в среднем движется вдвое ближе к заданной траектории [4, 6, 10].

2. Устойчивость к возмущениям. Даже при наличии шумов IMU, одометрии и ограничений угла рулевого механизма система остаётся устойчива [14].

3. Улучшение поведения робота на поворотах. Одноконтурная система демонстрирует характерный «снос» при криволинейном движении.

4. Двухконтурная – стабилизирует движение.

5. Плавность свайпа рулевого привода. ПД-контур исключает резкие изменения угла.

6. Пригодность для реальных мобильных роботов. Модель соответствует AGV/UGV роботам Husky, Jackal, Scout Mini [12, 13].

Заключение

В работе предложена двухконтурная система управления рулевым механизмом Аккермана для мобильной робототехнической платформы, включающая внутренний геометрический контур и внешний корректирующий ПД-регулятор. На основе кинематической модели движения, аналитического вывода ошибок и анализа устойчивости по Ляпунову сформирована интегрированная структура управления, обеспечивающая точное следование криволинейным траекториям.

Численное моделирование в среде MATLAB показало преимущество предложенного подхода по сравнению с одноконтурным управлением: RMS-ошибка снижена на 38-52%, максимальная ошибка – на 44%, ошибка ориентации уменьшена более чем в два раза, при сохранении устойчивости и робастности к шумам измерений и ограничениям рулевого механизма.

Полученные результаты подтверждают эффективность двухконтурной архитектуры для AGV/UGV-платформ. В дальнейшем планируется расширение модели до динамической, интеграция фильтра Калмана, применение MPC-подходов и экспериментальная валидация на реальной робототехнической платформе.

Список литературы

1. Silvera G. Vehicle modeling and Ackermann steering geometry for mobile robots / G. Silvera, R. Ribeiro, J.R. de Lima // IEEE Latin America Transactions. – 2020. – Vol. 18, № 6. – P. 1074-1081. <https://doi.org/10.1109/TLA.2020.9099757>.
2. Rajamani R. Vehicle Dynamics and Control / R. Rajamani // 2nd ed. – New York: Springer, 2012. – 498 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1433-9>.
3. Siegwart R. Introduction to Autonomous Mobile Robots / R. Siegwart, I. Nourbakhsh, D. Scaramuzza // 2nd ed. – Cambridge, MA: MIT Press, 2011. – 472 p.
4. A survey of motion planning and control techniques for self-driving urban vehicles / B. Paden et al // IEEE Transactions on Intelligent Vehicles. – 2016. – Vol. 1, № 1. – P. 33-55. <https://doi.org/10.1109/TIV.2016.2578706>.
5. Karginov G. Ackermann steering control for autonomous mobile robots / G. Karginov, K. Zonov // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2021. – Vol. 1061. – 012015. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/1061/1/012015>.
6. A review of motion planning techniques for automated vehicles / D. González et al // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. – 2016. – Vol. 17, № 4. – P. 1135-1145. <https://doi.org/10.1109/TITS.2015.2498841>.

7. A stable tracking control method for an autonomous mobile robot / Y. Kanayama et al // Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). – 1990. – P. 384-389. <https://doi.org/10.1109/ROBOT.1990.126000>.
8. Thrun S. Probabilistic Robotics / S. Thrun, W. Burgard, D. Fox // Cambridge, MA: MIT Press, 2005. – 657 p.
9. Springer Handbook of Robotics / B. Siciliano et al // 2nd ed. – Springer, 2016. – 1626 p.
10. Gao Y. Path tracking control of unmanned ground vehicles based on curvature and yaw stabilization / Y. Gao, S. Li, Z. Li // Robotics and Autonomous Systems. – 2018. – Vol. 102. – P. 80-95. <https://doi.org/10.1016/j.robot.2018.01.004>.
11. Sriram A. Ackermann steering-based vehicle with robust tracking control / A. Sriram, K. Krishna // Robotics and Autonomous Systems. – 2019. – Vol. 119. – P. 77-88. <https://doi.org/10.1016/j.robot.2019.06.004>.
12. Clearpath Robotics. Husky Unmanned Ground Vehicle – Technical Specifications. – 2023. <https://clearpathrobotics.com> (data obrashcheniya: 25.11.2025).
13. Clearpath Robotics. Jackal Unmanned Ground Vehicle – Datasheet. – 2023. <https://clearpathrobotics.com> (data obrashcheniya: 25.11.2025).
14. MicroStrain Technologies. IMU Sensors Product Catalog. – 2022. <https://www.microstrain.com> (data obrashcheniya: 25.11.2025).
15. MathWorks. Modeling and Simulation of Mobile Robots with Ackermann Steering. MATLAB Documentation. – 2024. <https://www.mathworks.com> (data obrashcheniya: 25.11.2025).

А.Е. Исмайылов¹, Ж.Т. Айтуганова^{1,2}, Ж.Б. Полатова^{1*}, М.М. Сыдыкова¹

¹Алматы технологиялық университеті,

050012, Қазақстан Республикасы, Алматы қ., Төле би көш., 100

²Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,

050040, Қазақстан Республикасы, Алматы қ., әл-Фараби даңғ., 71

*e-mail: zhansaya.pb@gmail.com

АККЕРМАН ГЕОМЕТРИЯСЫ БАР МОБИЛЬДІ РОБОТТЫҢ ЕКІКОНТУРЛЫ РУЛЬДІК БАСҚАРУ ЖҮЙЕСІНІҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛІ ЖӘНЕ ТАЛДАУЫ

Мақалада сыртқы әсерлер мен өлшеу шумдары жағдайында берілген траекторияны дәл қадағалау сапасын арттыруға бағытталған Аккерман геометриясы бар мобильді роботтың екіконтурлы рульдік басқару механизмінің математикалық моделі өзірленіп, зерттелді. Ішкі контур алдыңғы басқарылатын дөңгелектердің бұрылу бұрыштарының өзара сәйкестігін қамтамасыз ететін және бүйірлік сырғуды минимизациялайтын классикалық Аккерман геометриясын жүзеге асырады. Сыртқы контур люфтар, инерциялық әсерлер, модель дәл еместігі және сенсор қателіктерінен туындайтын орын ауыстыру мен бағдарлау қателіктерін өтейтін пропорционалды-дифференциалды (ПД) реттегішке негізделген түзетуші басқару жүйесі болып табылады. Жабық жүйенің тұрақтылығы Ляпунов функциясы негізінде аналитикалық түрде талданды. ПД-регулятор коэффициенттері оң мәндер қабылдаған жағдайда жүйенің асимптотикалық тұрақтылығы және орын ауыстыру мен бағдарлау қателіктерінің нөлге ұмтылуы қамтамасыз етілетіні дәлелденді.

Ұсынылған модельді сандық тексеру үшін MATLAB R2023b ортасында нақты автономды платформалардың (Clearpath Husky, Jackal, Scout Mini) параметрлерін пайдалана отырып модельдеу жүргізілді. Қозғалыстың әртүрлі сценарийлері қарастырылды: S-тәрізді және доға тәрізді траекториялар, IMU және одометрия шумдарының әсері, сондай-ақ руль жетегінің бұрылу бұрышының шектеулері.

Модельдеу нәтижелері ұсынылған екіконтурлы басқару құрылымы траекторияны қадағалаудың орташа квадраттық қатесін 38-52%-ға төмендететінін, максималды қатені 44%-ға азайтатынын және шумдар мен сыртқы әсерлерге төзімділікті арттыратынын көрсетті. Өзірленген жүйе бірқалыпты және тұрақты қозғалысты қамтамасыз етеді және автономды көлік құралдары, роботтандырылған платформалар мен интеллектуалды навигациялық жүйелерде қолдану үшін перспективалы болып табылады.

Түйін сөздер: Аккерман, мобильді робот, рульдік механизм, екіконтурлы басқару, ПД-регулятор, Ляпунов функциясы, MATLAB модельдеу, автономды көлік жүйелері.

A. Ismayilov¹, Zh. Aituganova^{1,2}, Zh. Polatova^{1*}, M. Sydykova¹

¹Almaty Technological University

050012, Republic of Kazakhstan, Almaty, Tole bi St., 100

²Al-Farabi Kazakh National University,

050040, Republic of Kazakhstan, Almaty, al-Farabi Ave., 71

*e-mail: zhansaya.pb@gmail.com

MATHEMATICAL MODEL AND ANALYSIS OF A TWO-LOOP STEERING CONTROL SYSTEM FOR A MOBILE ROBOT WITH ACKERMANN GEOMETRY

This paper presents the development and investigation of a mathematical model of a two-loop steering control system for a mobile robot with Ackermann geometry, aimed at improving trajectory tracking accuracy under external disturbances and measurement noise. The inner control loop implements the classical Ackermann geometry, ensuring coordinated steering angles of the front wheels and minimizing lateral slip. The outer loop represents a corrective control system based on a proportional-derivative (PD) controller, which compensates for position and orientation errors caused by mechanical backlash, inertial effects, model inaccuracies, and sensor measurement errors. An analytical stability analysis of the closed-loop system was conducted using the Lyapunov function method. It is proven that for positive values of the PD controller gains, asymptotic stability is guaranteed, and the position and orientation errors converge to zero.

To numerically validate the proposed model, simulations were performed in the MATLAB R2023b environment using parameters of real autonomous platforms such as Clearpath Husky, Jackal, and Scout Mini. Various motion scenarios were considered, including S-shaped and curved trajectories, IMU and odometry noise, as well as steering angle constraints.

Simulation results demonstrate that the proposed two-loop control architecture reduces the root mean square trajectory tracking error by 38-52%, decreases the maximum tracking error by 44%, and improves robustness to noise and disturbances. The developed system ensures smooth and stable motion and shows strong potential for application in autonomous vehicles, robotic platforms, and intelligent navigation systems.

Key words: Ackermann geometry, mobile robot, steering mechanism, two-loop control, PD controller, Lyapunov function, MATLAB simulation, autonomous vehicle systems.

Сведения об авторах

Аманкелди Есиркегенович Исмайылов – Сеньор-лектор, Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан; e-mail: box1_email61@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0089-7036>.

Жамила Темирбаевна Айтуганова – докторант, Казахский национальный университет имени аль-Фараби; Сеньор-лектор, Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан; e-mail: zhamila_a77@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0013-8272>.

Жансая Бактыбаевна Полатова* – Сеньор-лектор, Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан; e-mail: zhansaya.pb@gmail.com, zh.polatova@atu.edu.kz. ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-5668-2563>.

Мадина Мукатаевна Сыдыкова – Сеньор-лектор, Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан; e-mail: m.sydykova@atu.edu.kz. ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-5841-376X>.

Авторлар туралы мәліметтер

Аманкелди Есиркегенович Исмайылов – Сеньор-лектор, Алматы технологиялық университеті, Алматы, Қазақстан; e-mail: box1_email61@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0089-7036>.

Жамила Темирбаевна Айтуганова – докторант, Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан; Сеньор-лектор, Алматы технологиялық университеті, Алматы, Қазақстан; e-mail: zhamila_a77@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0013-8272>.

Жансая Бактыбаевна Полатова* – Сеньор-лектор, Алматы технологиялық университеті, Алматы, Қазақстан; e-mail: zhansaya.pb@gmail.com, zh.polatova@atu.edu.kz. ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-5668-2563>.

Мадина Мукатаевна Сыдыкова – Сеньор-лектор, Алматы технологиялық университеті, Алматы, Қазақстан; e-mail: m.sydykova@atu.edu.kz. ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-5841-376X>.

Information about the authors

Amankeldi Ismayilov – Senior-Lecturer, Almaty Technological University, Almaty, Kazakhstan; e-mail: box1_email61@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0089-7036>.

Zhamila Aituganova – doctoral student, Al-Farabi Kazakh National University; Senior-Lecturer, Almaty Technological University, Almaty, Kazakhstan; e-mail: zhamila_a77@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0013-8272>.

Polatova Zhansaya* – Senior-Lecturer, Almaty Technological University, Almaty, Kazakhstan; e-mail: zhansaya.pb@gmail.com, zh.polatova@atu.edu.kz. ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-5668-2563>.

Madina Sydykova – Senior-Lecturer, Almaty Technological University, Almaty, Kazakhstan; e-mail: m.sydykova@atu.edu.kz. ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-5841-376X>.

Поступила в редакцию 05.01.2026
Поступила после доработки 20.02.2026
Принята к публикации 23.02.2026

[https://doi.org/10.53360/2788-7995-2026-1\(21\)-26](https://doi.org/10.53360/2788-7995-2026-1(21)-26)

FTAXP: 53.49.21



**А.Т. Рахметоллаева^{2*}, Д.А. Әскержанов^{1,2}, Н.Е. Қадырболат^{1,2}, А. Ерболұлы^{1,2},
Р.К. Құрманғалиев²**

¹Шәкәрім университеті, «Қатайту технологиялары және жабындар» Инжиниринг Орталығы,
071412, Қазақстан Республикасы, Семей қ., Глинка к-сі, 20 А

²Шәкәрім университеті, Техникалық физика және жылуэнергетика кафедрасы,
071412, Қазақстан Республикасы, Семей қ., Глинка к-сі, 20 А

*e-mail: aknurrahmetollaeva4@gmail.com

ЭЛЕКТРОЛИТТИ-ПЛАЗМАЛЫҚ ҚАТАЙТУ КЕЗІНДЕГІ 65Г БОЛАТ ҚҰРЫЛЫМЫНЫҢ ӨЗГЕРІСІ

Аңдатпа: Осы жұмыста 65Г маркалы болатқа электролитті-плазмалық қатайту (ЭПҚ) әдісінің әсері зерттелді. Зерттеу алдында үлгілердің беті механикалық әдіспен тегістеліп, кейіннен жылтырату операцияларынан өткізіліп, бастапқы беткі ақаулар мен бөгде қабаттар толықтай жойылды. Зерттеу барысында натрий карбонатының 20%-дық ерітіндісі электролит ретінде қолданылып, үш үлгіге әртүрлі қыздыру уақыттарымен ЭПҚ жүзеге асырылды. Материалдың бастапқы микроқұрылымы феррит пен перлит құрылымдық бөлшектерінен тұратындығы көрсетілді. Шынықтыру нәтижесінде аустенит мартенситке айналып, өте ұсақ ине тәрізді құрылым қалыптасты. Сканерлеуші электронды микроскоп арқылы алынған бейнелер ЭПҚ өңдеуі беткі қабаттың құрылымын айтарлықтай өзгертетінін көрсетті: түйіршіктер ұсақталып, карбидтік фазалар түзіліп, беткі қабаттағы микроқаттылық едәуір артты. Мартенситтің түзілуі және марганец элементінің болатының қатаю қабілетіне әсері қаттылықты 3,1-3,56 есе арттыруға мүмкіндік беретіндігі дәлелденді. Зерттеу нәтижелері 65Г болатының микроқұрылымы мен механикалық қасиеттерінің ЭПҚ әдісі арқылы өңделген болат бөлшектердің беріктігі мен сенімділігі артып, олардың қызмет ету мерзімі ұзартылады. Осыған байланысты аталған әдіс машина жасау, көлік және ауыл шаруашылығы техникасында ауыр жүктемелер мен үйкеліс жағдайында жұмыс істейтін серіппелер, біліктер, тісті доңғалақтар және басқа да жауапты бөлшектерді өндіруде перспективалы әрі тиімді технология ретінде қолданылуы мүмкін.

Түйінді сөздер: болат 65 Г, электролитті-плазмалық қатайту, қаттылық, беткі қабаттың құрылымы, плазма

Кіріспе

Қазіргі заманда машиналар мен құрал-саймандардың сенімділігі мен қызмет ету мерзімін арттыру үшін металл бөлшектердің беткі қабатын қатайту ерекше маңызды. Болат бөлшектердің қызмет ету мерзімін арттыру және олардың механикалық қасиеттерін жақсарту үшін беткі қабатты қатайту маңызды мәселе болып табылады. Электролитті-плазмалық қатайту (ЭПҚ) – бұл металл бетінің құрылымын өзгертіп, қаттылығын арттыруға мүмкіндік беретін заманауи әдіс. Әсіресе, ауыр жүктемелерге, абразивті әсерлерге және жоғары температураға ұшырайтын бөлшектерді өңдеуде ЭПҚ тиімді болып саналады [1].

Басқа зерттеулерде анод ретінде диаметрі шамамен 190 мм болатын тот баспайтын болат конустары қолданылып, плазматронмен локализацияланған жылытылу үшін пайдаланылған. Мұндай конфигурацияларда разрядтар бетке таралуы әртүрлі болып, беткі