

К.Б. Тусупова

Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
050040, Республика Казахстан, г. Алматы, пр. аль-Фараби, 71
e-mail: kamshat-0707@mail.ru

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА ЭФФЕКТИВНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В ОТКРЫТОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Аннотация: Одной из актуальных проблем в области автоматизации управления экономическими процессами является сложность нахождения аналитического решения задач оптимального управления в нелинейных экономических моделях. Это обусловлено наличием сложных взаимосвязей между переменными, ограничений на распределение ресурсов и воздействия внешних факторов. В таких условиях традиционные аналитические методы становятся неэффективными, что требует применения численных алгоритмов. В статье разработан численный алгоритм для оптимального распределения ресурсов в открытой экономической системе. Основой метода является использование множителей Лагранжа и метода золотого сечения для нахождения стационарного состояния системы при наличии ограничений на трудовые и инвестиционные ресурсы. Предложенный подход позволяет автоматизировать вычислительные процессы и обеспечить высокую точность расчетов. Для реализации алгоритма использован математический пакет Maple. В статье рассмотрены особенности программной реализации алгоритма, даны численные эксперименты, демонстрирующие его устойчивость и точность. Разработанный алгоритм может быть применен в информационных системах управления ресурсами, автоматизированных системах планирования и принятия решений на предприятиях. Он позволяет моделировать экономические процессы и прогнозировать оптимальные траектории распределения ресурсов с учетом внешних факторов. Полученные результаты подтверждают эффективность подхода для задач автоматизации и информационных технологий в сфере экономического анализа и управления.

Ключевые слова: численный алгоритм, численный метод, оптимальное распределение, открытая экономика, нелинейное программирование.

Введение

Современные экономические системы характеризуются сложными динамическими процессами, требующими эффективных методов управления и оптимального распределения ресурсов. В условиях цифровизации и развития автоматизированных технологий особую значимость приобретают численные методы, позволяющие решать задачи оптимального управления в экономических моделях. Одним из ключевых направлений исследований в данной области является разработка алгоритмов, обеспечивающих высокую вычислительную эффективность при решении сложных нелинейных задач.

Одной из актуальных проблем в данной области является невозможность нахождения аналитического решения задач оптимального управления в нелинейных экономических моделях. Это требует использования вычислительных методов и специализированного программного обеспечения. Важным направлением исследований становится разработка эффективных алгоритмов, создание программных систем для их реализации и изучение методов оптимального принятия решений в условиях динамических управляемых систем.

Существующие исследования охватывают широкий спектр методов, направленных на решение задач оптимального управления. Среди них можно выделить фракционное оптимальное управление [1], эволюционные алгоритмы оптимизации [2, 3], спектральные методы и численные техники для решения нелинейных дифференциальных уравнений [4-6], а также проблемы разработки программного обеспечения для автоматизации вычислений [7, 8]. В этом контексте классические методы, такие как метод множителей Лагранжа, играют важную роль, позволяя преобразовывать задачи с ограничениями в эквивалентные безограниченные формы. Это упрощает вычислительные процедуры и снижает сложность их реализации в программных средах [9-12].

Условия и методы исследования

Рассмотрим математическую модель открытой экономики. Согласно этой модели, объем выпуска продукции в каждом i – м секторе определяется через производственную функцию Кобба-Дугласа:

$$X_i = F_i(K_i, L_i) = A_i K_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i}, \quad (i = 0, 1, 2) \quad (1)$$

Здесь X_i – объем выпускаемой продукции, K_i – объем основных производственных фондов, L_i – объем трудовых ресурсов, A_i – коэффициент нейтрального научно-технического прогресса, α_i – коэффициент эластичности фондов, $(1 - \alpha_i)$ – коэффициент эластичности трудовых ресурсов.

За каждым сектором закреплены основные производственные фонды (ОПФ), в то время как трудовые ресурсы и инвестиции можно свободно перемещать между секторами. Изменение за период ОПФ i -го сектора состоит из износа $-\mu_i K_i$ и прироста за счет капиталовложений I_i :

$$\frac{dK_i}{dt} = -\mu_i K_i + I_i, \quad K_i(0) = K_i^0, \quad i = 0, 1, 2. \quad (2)$$

Введем следующие обозначения:

$\theta_i = \frac{L_i}{L}$ – доли секторов в распределении трудовых ресурсов;

$s_i = \frac{I_i}{X_1}$ – доли секторов в распределении инвестиционных ресурсов;

$f_i(k_i) = \frac{X_i}{L_i}$ – производительность труда i -го сектора.

$k_i = \frac{K_i}{L_i}$ – фондовооруженность секторов;

$y_1 = \frac{Y_1}{L}$ – доля импорта товаров для инвестиций;

$y_2 = \frac{Y_2}{L}$ – доля импорта товаров для потребления;

$x_i = \theta_i f_i(k_i)$ – удельный выпуск секторов;

Тогда уравнения (2) запишем в следующем виде для фондовооруженности секторов:

$$\dot{k}_i = -\lambda_i k_i + \left(\frac{s_i}{\theta_i}\right)(x_1 + y_1), \quad k_i(0) = k_i^0, \quad \lambda_i > 0, \quad (i = 0, 1, 2), \quad (3)$$

$$x_i = \theta_i A_i k_i^{\alpha_i}, \quad A_i > 0, \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad (i = 0, 1, 2), \quad (4)$$

со следующими ограничениям:

$$\text{инвестиционный баланс:} \quad s_0 + s_1 + s_2 = 1, \quad s_i > 0, \quad i = 0, 1, 2 \quad (5)$$

$$\text{трудовой баланс:} \quad \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, \quad \theta_i > 0, \quad i = 0, 1, 2 \quad (6)$$

$$\text{материальный баланс:} \quad (1 - \beta_0)x_0 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + y_0, \quad 0 < \beta_i < 1, \quad i = 0, 1, 2 \quad (7)$$

$$\text{внешнеторговый баланс:} \quad q_0 y_0 = q_1 y_1 + q_2 y_2 \quad (8)$$

$$\text{индустриальная безопасность:} \quad y_1 \leq \gamma_1 x_1, \quad y_2 \leq \gamma_2 x_2 \quad (9)$$

Здесь γ_1 – коэффициент квотирования на импорт инвестиционных товаров, z_0 – доля экспорта материалов, q_0 – мировая цена экспортируемых материалов, q_1, q_2 – мировые цены импортируемых инвестиционных и потребительских товаров, λ_i – коэффициент снижения фондовооруженности из-за износа капитала и роста занятости, β_i – прямые материальные затраты на единицу продукции i -го сектора.

Постановка задачи заключается в нахождении оптимального распределения ресурсов между потребительским и инвестиционным секторами в открытой экономике с учетом квот на импорт инвестиционных товаров. Целью является максимизация удельного выпуска потребительского сектора ($x_2 = \theta_2 A_2 k_2^{\alpha_2}$), который служит основным источником прибыли. Для этого необходимо учитывать долю экспорта материалов, мировые цены на экспортируемые материалы, а также цены на импортируемые инвестиционные и потребительские товары. Это приводит к постановке задачи нелинейного программирования, цель которой — нахождение устойчивого состояния системы. В статье, индустриальная безопасность трактуется как соблюдение условий, обеспечивающий равновесие и устойчивость системы.

$$y_1 = \gamma_1 x_1, \quad y_2 = \gamma_2 x_2. \quad (10)$$

Тогда уравнение внешнеторгового баланса (8) запишем следующим образом:

$$y_0 = \frac{q_1}{q_0} \gamma_1 x_1 + \frac{q_2}{q_0} \gamma_2 x_2. \quad (11)$$

Таким образом, формулировка задачи оптимального распределения ресурсов экономической системы выглядит следующим образом:

$$x_2 \xrightarrow{s_i, \theta_i} \max \quad (12)$$

при условиях:

$$s_0 + s_1 + s_2 = 1, \quad s_i > 0, \quad (13)$$

$$\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, \quad \theta_i > 0, \quad (14)$$

$$(1 - \beta_0)x_0 = \left(\beta_1 + \frac{q_1}{q_0} \gamma_1\right)x_1 + \left(\beta_2 + \frac{q_2}{q_0} \gamma_2\right)x_2, \quad 0 < \beta_i < 1, \quad (15)$$

$$x_i = \theta_i A_i k_i^{\alpha_i}, \quad A_i > 0, \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad (16)$$

$$-\lambda_i k_i + \frac{s_i}{\theta_i} (1 + \gamma_1) \theta_1 A_1 k_1^{\alpha_1} = 0, \quad \lambda_i > 0, \quad (i = 0, 1, 2). \quad (17)$$

Разработанная упрощенная модель позволяет более эффективно исследовать устойчивость экономической системы, акцентируя внимание на тех условиях и ограничениях, которые непосредственно влияют на поддержание равновесия и стабильности в производственной среде.

Решение задачи. Так как производится поиск стационарного решения, фондовооруженность секторов остается постоянной на протяжении времени. В таком случае, из уравнения (3) можно вывести следующую систему нелинейных уравнений.

$$-\lambda_0 k_0 + \frac{s_0 \theta_1}{\theta_0} (1 + \gamma_1) A_1 k_1^{\alpha_1} = 0, \quad (18)$$

$$-\lambda_1 k_1 + s_1 (1 + \gamma_1) A_1 k_1^{\alpha_1} = 0, \quad (19)$$

$$-\lambda_2 k_2 + \frac{s_2 \theta_1}{\theta_2} (1 + \gamma_1) A_1 k_1^{\alpha_1} = 0. \quad (20)$$

И параллельно здесь находим формулы для k_i :

$$k_0 = \frac{s_0 \theta_1}{\theta_0 s_1} s_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}} \left(\frac{A_1}{\lambda_1} (1 + \gamma_1)\right)^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}} \frac{A_1}{\lambda_0} (1 + \gamma_1) \quad (21)$$

$$k_1 = s_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}} \left(\frac{A_1}{\lambda_1} (1 + \gamma_1)\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}} \quad (22)$$

$$k_2 = \frac{s_2 \theta_1}{\theta_2 s_1} s_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}} \left(\frac{A_1}{\lambda_1} (1 + \gamma_1)\right)^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}} \frac{A_1}{\lambda_2} (1 + \gamma_1) \quad (23)$$

Подставив значения k_0, k_1 и k_2 , полученные из формул (21) – (23), в исходную формулу удельного выпуска для каждого сектора (16), получаем преобразованную систему уравнений в виде:

$$x_0 - \left(\frac{s_0 \theta_1}{\theta_0 s_1}\right)^{\alpha_0} \theta_0 s_1^{\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}} \omega_0 = 0 \quad (24)$$

$$x_1 - \theta_1 s_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}} \omega_1 = 0 \quad (25)$$

$$x_2 - \left(\frac{s_2 \theta_1}{\theta_2 s_1}\right)^{\alpha_2} \theta_2 s_1^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}} \omega_2 = 0 \quad (26)$$

где через $\omega_j, j = 0, 1, 2$ обозначены постоянные коэффициенты системы:

$$\omega_0 = A_0 \left(\frac{A_1}{\lambda_0} (1 + \gamma_1) \right)^{\alpha_0} \left(\frac{A_1}{\lambda_1} (1 + \gamma_1) \right)^{\frac{\alpha_0 \alpha_1}{1 - \alpha_1}}$$

$$\omega_1 = A_1 \left(\frac{A_1}{\lambda_1} (1 + \gamma_1) \right)^{\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1}}$$

$$\omega_2 = A_2 \left(\frac{A_1}{\lambda_2} (1 + \gamma_1) \right)^{\alpha_2} \left(\frac{A_1}{\lambda_1} (1 + \gamma_1) \right)^{\frac{\alpha_2 \alpha_1}{1 - \alpha_1}}$$

Так как система уравнений (24) – (26) состоит из шести управляющих параметров, и эти параметры описаны тремя балансирующими соотношениями (13) – (15), тогда количество свободных управляющих параметров три. В данной работе в качестве свободных управляющих параметров выбирается s_1 и θ_1 .

Для максимизации удельного выпуска потребительского сектора используется принцип золотого сечения, который помогает определить такие пропорции между управляющими параметрами $\theta_i, s_i, i = 0, 1, 2$ которые обеспечат максимальный удельный выпуск с учетом всех ограничений и взаимозависимостей между ними.

Поскольку s_1 и θ_1 являются свободными переменными, остаточная доля ресурсов для материального и потребительского секторов будет составлять $1 - s_1$ и $1 - \theta_1$ соответственно. Обозначив через m – долю потребительского сектора в остаточных инвестиционных ресурсах и через h – долю потребительского сектора в остаточных трудовых ресурсах, получаем следующие выражения для распределения:

для трудовых ресурсов:

$$\theta_0 = (1 - h)(1 - \theta_1), \quad \theta_2 = h(1 - \theta_1) \quad (26)$$

для инвестиционных ресурсов:

$$s_0 = m(1 - s_1), \quad s_2 = (1 - m)(1 - s_1). \quad (27)$$

И так преобразуя исходную задачу (12) – (17) с помощью (26) и (27), получаем следующую задачу нелинейного программирования:

$$x_2 \xrightarrow{s_i, \theta_i} \max \quad (28)$$

при условиях:

$$(1 - \beta_0)x_0 = \left(\beta_1 + \frac{q_1}{q_0} \gamma_1 \right) x_1 + \left(\beta_2 + \frac{q_2}{q_0} \gamma_2 \right) x_2, \quad 0 < \beta_i < 1, \quad i = 0, 1, 2, \quad (29)$$

$$x_0 = \left(\frac{m(1-s_1)\theta_1}{(1-h)(1-\theta_1)s_1} \right)^{\alpha_0} \theta_0 s_1^{\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}} \omega_0, \quad (30)$$

$$x_1 = \theta_1 s_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}} \omega_1, \quad (31)$$

$$x_2 = \left(\frac{(1-m)(1-s_1)\theta_1}{h(1-\theta_1)s_1} \right)^{\alpha_2} \theta_2 s_1^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}} \omega_2. \quad (32)$$

Для решения поставленной задачи применим метод множителей Лагранжа. Функцию Лагранжа запишем в следующем виде:

$$L(\theta_1, s_1, h, m, x_0, x_1, x_2, c_1, c_2, c_3, c_4) = -x_2 + c_1 \left((1 - \beta_0)x_0 - \left(\beta_1 + \frac{q_1}{q_0} \gamma_1 \right) x_1 - \left(\beta_2 + \frac{q_2}{q_0} \gamma_2 \right) x_2 \right) +$$

$$+ c_2 \left(x_0 - \left(\frac{m(1-s_1)\theta_1}{(1-h)(1-\theta_1)s_1} \right)^{\alpha_0} (1 - h)(1 - \theta_1) s_1^{\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}} y_0 \right) + c_3 \left(x_1 - \theta_1 s_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}} y_1 \right) +$$

$$+ c_4 \left(x_2 - \left(\frac{(1-m)(1-s_1)\theta_1}{h(1-\theta_1)s_1} \right)^{\alpha_2} h(1 - \theta_1) s_1^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}} y_2 \right). \quad (33)$$

Для исследования функции (33) на экстремум, запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial s_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial h} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad (i = 0, 1, 2)$$

сформулируем условие стационарности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = & c_2 \left(\frac{m(1-s_1)\theta_1}{(1-h)(1-\theta_1)s_1} \right)^{\alpha_0} (1-h)s_1^{\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}} y_0 \left(1 - \frac{\alpha_0}{\theta_1} \right) - c_3 s_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}} y_1 + \\ & + c_4 \left(\frac{(1-m)(1-s_1)\theta_1}{h(1-\theta_1)s_1} \right)^{\alpha_2} h s_1^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}} y_2 \left(1 - \frac{\alpha_2}{\theta_1} \right) = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial s_1} = & c_2 \left(\frac{m(1-s_1)\theta_1}{(1-h)(1-\theta_1)s_1} \right)^{\alpha_0} \alpha_0 (1-h)(1-\theta_1) s_1^{\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}-1} y_0 \left(\frac{1}{1-s_1} - \frac{1}{1-\alpha_1} \right) - \\ & - c_3 \frac{\alpha_1 \theta_1 s_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}-1} y_1}{(1-\alpha_1)s_1} - c_4 \alpha_2 \left(\frac{(1-m)(1-s_1)\theta_1}{(1-\theta_1)h s_1} \right)^{\alpha_2} (1-\theta_1) h s_1^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}-1} y_2 \left(\frac{1}{1-s_1} - \frac{1}{1-\alpha_1} \right) = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\frac{\partial L}{\partial m} = - \frac{c_2 \left(\frac{m(1-s_1)\theta_1}{(1-h)(1-\theta_1)s_1} \right)^{\alpha_0} \alpha_0 (1-h)(1-\theta_2) s_1^{\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}} y_0}{m} + \frac{c_4 \alpha_2 \left(\frac{(1-m)(1-s_1)\theta_1}{(1-\theta_1)h s_1} \right)^{\alpha_2} h (1-\theta_1) s_1^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}} y_2}{1-m} = 0 \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial h} = & c_2 \left(\frac{m(1-s_1)\theta_1}{(1-h)(1-\theta_1)s_1} \right)^{\alpha_0} (1-\theta_1) s_1^{\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}} y_0 (1-\alpha_0) + \\ & + c_4 (1-\theta_1) s_1^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}} y_2 \left(\frac{(1-m)(1-s_1)\theta_1}{(1-\theta_1)h s_1} \right)^{\alpha_2} (1-\alpha_2) = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_0} = (1-\beta_0)c_1 + c_2 = 0 \quad (38)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = - \left(\beta_1 + \frac{q_1}{q_0} \gamma_1 \right) c_1 + c_3 = 0 \quad (39)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -1 - \left(\beta_2 + \frac{q_2}{q_0} \gamma_2 \right) c_1 + c_4 = 0 \quad (40)$$

Таким образом, получили нелинейную систему из одиннадцати уравнений (29)-(32) и (34)-(40) с из одиннадцатью неизвестными параметрами. Из данной системы путем алгебраических преобразований находится управляющие параметры и множители.

Для обеспечения оптимального роста между секторами и сбалансированного распределения трудовых и инвестиционных ресурсов между секторами с учетом их эластичности, соотношения между управляющими параметрами должны удовлетворять равенствам соотношений [13]:

$$\frac{s_0 \theta_1}{\theta_0 s_1} = \frac{m(1-s_1)\theta_1}{(1-h)(1-\theta_1)s_1} = \frac{\alpha_0(1-\alpha_1)}{\alpha_1(1-\alpha_0)} \quad (41)$$

$$\frac{s_2 \theta_1}{\theta_2 s_1} = \frac{(1-m)(1-s_1)\theta_1}{h(1-\theta_1)s_1} = \frac{\alpha_2(1-\alpha_1)}{\alpha_1(1-\alpha_2)} \quad (42)$$

$$\frac{s_0 \theta_2}{\theta_0 s_2} = \frac{m(1-s_1)h(1-\theta_1)}{(1-h)(1-\theta_1)(1-m)(1-s_1)} = \frac{\alpha_0(1-\alpha_2)}{\alpha_2(1-\alpha_0)} \quad (43)$$

Это позволит каждому сектору развиваться гармонично, минимизируя диспропорции в распределении производственных факторов.

Далее задача нахождения оптимального распределения ресурсов между потребительским и инвестиционным секторами с учётом квот на импорт инвестиционных товаров решается с помощью построения нелинейной функции $f(s_1)$, которая представляет решение для всех параметров и переменных, от неё зависящих:

Алгоритм численного решения. Численное решение поставленной задачи начинается с нахождения значение параметра s_1 .

Шаг 1. Вычисляется значение s_1 из алгебраической нелинейной функции $f(s_1)$, где s_1 варьируется в диапазоне от 0 до 1 (рис. 1). Функция определяется выражением:

$$f(s_1) = s_1 \left((1 - \alpha_0)(1 - \beta_0) \left(\frac{\alpha_0(1 - \alpha_1)}{\alpha_1(1 - \alpha_0)} \right)^{\alpha_0} \omega_0 s_1^{\frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}} + (1 - \alpha_1) \left(\beta_1 + \frac{q_1}{q_0} \gamma_1 \right) \omega_1 s_1^{\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1}} \right) - \\ - \alpha_1(1 - \alpha_0)(1 - \beta_0) \left(\frac{\alpha_0(1 - \alpha_1)}{\alpha_1(1 - \alpha_0)} \right)^{\alpha_0} \omega_0 s_1^{\frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}}. \quad (44)$$

Шаг 2. Найти множители Лагранжа c_2, c_3, c_4 и c_1 по формулам:

$$c_1 = - \frac{\omega_2(1 - \alpha_2) \left(\frac{\alpha_2(1 - \alpha_1)}{\alpha_1(1 - \alpha_2)} \right)^{\alpha_2} s_1^{\frac{\alpha_2}{1 - \alpha_1}}}{\omega_0(1 - \alpha_0) \left(\frac{\alpha_0(1 - \alpha_1)}{\alpha_1(1 - \alpha_0)} \right)^{\alpha_0} s_1^{\frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}} (1 - \beta_0) - \omega_2(1 - \alpha_2) \left(\frac{\alpha_2(1 - \alpha_1)}{\alpha_1(1 - \alpha_2)} \right)^{\alpha_2} \left(\beta_2 + \frac{q_2}{q_0} \gamma_2 \right) s_1^{\frac{\alpha_2}{1 - \alpha_1}}}, \quad (45)$$

$$c_2 = -(1 - \beta_0)c_1, \quad (46)$$

$$c_3 = \left(\beta_1 + \frac{q_1}{q_0} \gamma_1 \right) c_1, \quad (47)$$

$$c_4 = 1 + \left(\beta_2 + \frac{q_2}{q_0} \gamma_2 \right) c_1, \quad (48)$$

Шаг 3. Определить значения управляющего параметра h по формуле:

$$h = \frac{(1 - \alpha_2) \left((1 - \beta_0) \omega_0 \left(\frac{\alpha_0(1 - \alpha_1)}{\alpha_1(1 - \alpha_0)} \right)^{\alpha_0} s_1^{\frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}} + \omega_1 \left(\beta_1 + \frac{q_1}{q_0} \gamma_1 \right) s_1^{\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1}} \right)}{(1 - \alpha_2) \left((1 - \beta_0) \omega_0 \left(\frac{\alpha_0(1 - \alpha_1)}{\alpha_1(1 - \alpha_0)} \right)^{\alpha_0} s_1^{\frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}} + \left(\beta_2 + \frac{q_2}{q_0} \gamma_2 \right) \omega_2 \left(\frac{\alpha_2(1 - \alpha_1)}{\alpha_1(1 - \alpha_2)} \right)^{\alpha_2} s_1^{\frac{\alpha_2}{1 - \alpha_1}} \right) + \left(\beta_1 + \frac{q_1}{q_0} \gamma_1 \right) \omega_1 s_1^{\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1}}}. \quad (49)$$

Шаг 4. Вычислить управляющего параметра m по формуле:

$$m = \frac{\alpha_0(1 - \alpha_2)(1 - h)}{\alpha_0(1 - \alpha_2) + h(\alpha_2 - \alpha_0)}. \quad (50)$$

Шаг 5. Определить значения управляющего параметра θ_1 :

$$\theta_1 = \frac{c_2 \omega_0 \left(\frac{\alpha_0(1 - \alpha_1)}{\alpha_1(1 - \alpha_0)} \right)^{\alpha_0} s_1^{\frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}} (\alpha_0(1 - \alpha_2) + h(\alpha_2 - \alpha_0))}{(1 - \alpha_2) \left(c_2 \omega_0 \left(\frac{\alpha_0(1 - \alpha_1)}{\alpha_1(1 - \alpha_0)} \right)^{\alpha_0} s_1^{\frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}} - c_3 \omega_1 s_1^{\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1}} \right) + c_2 \omega_0 \left(\frac{\alpha_0(1 - \alpha_1)}{\alpha_1(1 - \alpha_0)} \right)^{\alpha_0} s_1^{\frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}} h(\alpha_2 - \alpha_0)}. \quad (51)$$

Шаг 6. Расчёт значений управляющих параметров $\theta_0, \theta_2, s_0, s_2$, используя выражения (26) и (27).

Шаг 7. Определить стационарного состояния фондовооружённости секторов на основе уравнений (21) – (23).

Шаг 8. Определить стационарное состояние производственных функций в относительных показателях с использованием формул (30) – (32).

Шаг 9. Расчёт удельного экспорта материалов согласно уравнению (10)-(11).

Результаты исследований

На основании описанного алгоритма были проведены численные расчёты, в результате которых получены оптимальные значения распределения ресурсов между секторами экономики.

Таблица 1 – Коэффициенты модели

i	0	1	2
α_i	0,68	0,68	0,45
β_i	0,39	0,49	0,52
λ_i	0,05	0,05	0,05
A_i	3,19	4,35	5,71

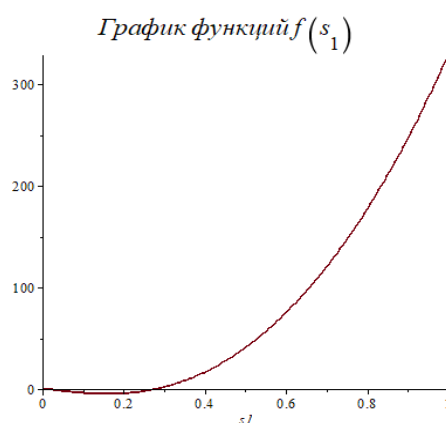


Рисунок 1 – График функций $f(s_1)$

Таблица 2 – Результаты расчета стационарного состояния открытой экономической системы

i	0	1	2
θ_i	0.3586366990	0.1841598625	0.4572034385
s_i	0.4990453594	0.256	0.2449546406
k_i	57872.60754	57813.96306	22282.50132
x_i	1981.194374	1386.329621	236.2269102
y_i	405.6391328	346.5824052	59.05672755

Обсуждение научных результатов

Как видно из расчётов, преобладание трудовых ресурсов в потребительском секторе θ_2 обусловлено высокой трудоёмкостью данного сегмента экономики. Производство товаров конечного спроса требует значительных трудозатрат, в то время как в фондосоздающем секторе наблюдается высокая степень автоматизации и капиталоемкости. Кроме того, большая доля инвестиций в материальном секторе s_0 связана с необходимостью поддержания и расширения производственных мощностей. Материальный сектор обеспечивает сырьевые и промежуточные товары, являясь основой для функционирования остальных отраслей.

Фондосоздающий сектор s_1 получает значительную долю инвестиций, что соответствует его роли в обеспечении обновления капитала и инфраструктурного развития.

Таким образом, предложенная модель оптимального распределения ресурсов подтверждает сбалансированность и экономическую обоснованность найденных пропорций. Сформированные соотношения между θ_i и s_i соответствуют экономическим реалиям и требованиям устойчивого роста.

Заключение

В данной работе представлен алгоритм для численных расчетов эффективного распределения ресурсов в открытой экономической системе. Разработанный подход позволяет автоматизировать процесс оптимизации, учитывая влияние внешних факторов и ограничения, связанные с производственными ресурсами. Предложенный метод может быть интегрирован в интеллектуальные информационные системы, соответствуя современным требованиям автоматизации и цифровизации экономических процессов. Полученные результаты подтверждают применимость разработанного алгоритма в задачах анализа и оптимизации производственно-экономических систем, делая его востребованным инструментом в сфере информационных технологий управления ресурсами.

Список литературы

1. Moradikashkooli A. An efficient optimization algorithm for nonlinear 2D fractional optimal control problems / A. Moradikashkooli, H. Haj Seyyed Javadi, S. Jabbehdari // J Supercomput. – 2024. – Vol. 80 – P. 7906-7930. <https://doi.org/10.1007/s11227-023-05732-z>.
2. Mohamed A.W. A novel differential evolution algorithm for solving constrained engineering optimization problems / A.W. Mohamed // J Intell Manuf. – 2018. – Vol. 29. – P. 659-692. <https://doi.org/10.1007/s10845-017-1294-6>.

3. Mohamed A.W. Adaptive guided differential evolution algorithm with novel mutation for numerical optimization / A.W. Mohamed, A.K. Mohamed // Int. J. Mach. Learn. & Cyber. – 2019. – Vol. 10. – P. 253-277. <https://doi.org/10.1007/s13042-017-0711-7>.
4. Mukesh K.R. A novel hybrid approach for computing numerical solution of the time-fractional nonlinear one and two-dimensional partial integro-differential equation / K.R. Mukesh, K.V. Amit, C. Carlo // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2023. – Vol.118. – P. 106986. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.106986>.
5. Dehghan R. A numerical solution of variable order fractional functional differential equation based on the shifted Legendre polynomials / R. Dehghan // SeMA. – 2019. – Vol. 76. – P. 217-226. <https://doi.org/10.1007/s40324-018-0173-1>.
6. Farzaneh S. A numerical approach for solving a class of two-dimensional variable-order fractional optimal control problems using Gegenbauer operational matrix / S. Farzaneh, S. Fahimeh, M. Kamal // IMA Journal of Mathematical Control and Information. – 2023. – Vol. 40(1). – P. 1-19. <https://doi.org/10.1093/imamci/dnac031>.
7. Software Engineering for Optimal Control Problems / A. Gornov et al // MANCS. – 2021. – Vol. 424. – P. 416-426.
8. Framework of Decision Support System for Effective Resource Management / I.N. Muhammad et al // Dubai, United Arab Emirates. – 2023. – P. 1-7. <https://doi.org/10.1109/ICBATS57792.2023.10111307>.
9. Murzabekov Z.N. Solution of steady state search problem in three-sector economic model of a cluster / Z.N. Murzabekov, M. Milosz, K.B. Tussupova // Actual Problems of Economics. – 2015. – Vol. 165(3). – P. 443-452.
10. Development of an algorithm for solving the problem of optimal control on a finite interval for a nonlinear system of a three-sector economic cluster / Z. Murzabekov et al // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2022. – Vol. 1(3-115). – P. 43-52. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2022.252866>.
11. Murzabekov Z. The optimal control problem with fixed-end trajectories for a three-sector economic model of a cluster / Z. Murzabekov, M. Milosz, K. Tussupova // ACIIDS, 2018, Dong Hoi City, Vietnam. – 2018. – Vol.10751 LNAI. – P. 382-391. https://doi.org/10.1007/978-3-319-75417-8_36
12. Problems of Optimal Control for a Class of Linear and Nonlinear Systems of the Economic Model of a Cluster / Z. Murzabekov et al // Vietnam Journal of Computer Science. – 2020. – Vol.7(2). – P. 109-127. <https://doi.org/10.1142/S2196888820500062>.
13. Murzabekov Z. Development of a model of efficient resource allocation in an open three-sector economy for balanced growth / Z. Murzabekov, K. Tussupova // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. – 2025. – № 124(4). – P. 59-70. <https://doi.org/10.26577/JMMCS2024-v124-i4-a5>.

Благодарности. Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP22684879).

К.Б. Тусупова

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,
050040, Қазақстан Республикасы, Алматы қ., әл-Фараби даңғылы, 71
e-mail: kamshat-0707@mail.ru

АШЫҚ ЭКОНОМИКАЛЫҚ ЖҮЙЕДЕ РЕСУРСТАРДЫ ТИІМДІ ҮЛЕСТІРУДІҢ САНДЫҚ ЕСЕПТЕУ АЛГОРИТМІ

Экономикалық процестерді автоматтандыру саласындағы өзекті мәселелердің бірі – сызықты емесе экономикалық модельдерде тиімді басқару есептерінің аналитикалық шешімін табудың күрделілігі. Бұл айнымалылар арасындағы күрделі байланыстардың, ресурстарды бөлуге қойылатын шектеулердің және сыртқы факторлар әсерінің болуымен байланысты. Мұндай жағдайда дәстүрлі аналитикалық әдістер тиімсіз болып қалатындықтан, сандық алгоритмдерді қолдануды талап етеді. Мақалада ашық экономикалық жүйеде ресурстарды тиімді бөлуге арналған сандық алгоритм ұсынылған. Жүйенің еңбек және инвестициялық ресурстарға шектеулер қойылған жағдайында стационарлық күйін анықтау үшін Лагранж көбейткіштері мен алтын қима әдісін пайдаланылады. Ұсынылған тәсіл есептеу процестерін автоматтандырып, жоғары дәлдікті

қамтамасыз етуге мүмкіндік береді. Алгоритм Maple математикалық пакеті ортасында жүзеге асырылды. Мақалада алгоритмнің бағдарламалық іске асырылу ерекшеліктері қарастырылып, оның тұрақтылығы мен дәлдігін көрсететін сандық эксперименттер келтірілген. Дайындалған алгоритмді ресурстарды басқару ақпараттық жүйелерінде, кәсіпорындардағы автоматтандырылған жоспарлау және шешім қабылдау жүйелерінде қолданылуға болады. Ол экономикалық процестерді модельдеуге және сыртқы факторларды ескере отырып, ресурстарды тиімді бөлу траекторияларын болжауға мүмкіндік береді. Алынған нәтижелер бұл тәсілдің экономикалық талдау мен басқару саласындағы автоматтандыру және ақпараттық технологиялар үшін тиімділігін растайды.

Түйін сөздер: сандық алгоритм, сандық әдіс, тиімді үлестіру, ашық экономика, сызықты емес бағдарламалау.

K.B. Tussupova

Al-Farabi Kazakh National University, Republic of Kazakhstan, Almaty
050040, Republic of Kazakhstan, Almaty, 71 Al-Farabi Avenue
e-mail: kamshat-0707@mail.ru

NUMERICAL CALCULATION ALGORITHM FOR EFFECTIVE RESOURCE ALLOCATION IN AN OPEN ECONOMIC SYSTEM

One of the pressing issues in the field of economic process automation is the complexity of finding an analytical solution to optimal control problems in nonlinear economic models. This is due to complex interdependencies between variables, constraints on resource allocation, and external influences. In such conditions, traditional analytical methods become ineffective, requiring the application of numerical algorithms. This paper presents a numerical algorithm for optimal resource allocation in an open economic system. The method is based on the use of Lagrange multipliers and the golden section method to determine the stationary state of the system under labor and investment resource constraints. The proposed approach automates computational processes and ensures high calculation accuracy. The mathematical package Maple was used to implement the algorithm. The paper discusses the features of the algorithm's software implementation and provides numerical experiments demonstrating its stability and accuracy. The developed algorithm can be applied in resource management information systems, automated planning, and decision-making systems in enterprises. It enables modeling of economic processes and forecasting optimal resource allocation trajectories considering external factors. The obtained results confirm the effectiveness of the approach for automation and information technologies in economic analysis and management.

Key words: numerical algorithm, numerical method, optimal allocation, open economy, nonlinear programming.

Сведения об авторах

Камшат Бакытжановна Тусупова – PhD, ВНС кафедры «Информационные системы»; Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Республика Казахстан; e-mail: kamshat-0707@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5254-3432>.

Автор туралы мәліметтер

Камшат Бакытжановна Тусупова – PhD, «Ақпараттық жүйелер» кафедрасының жетекші ғылыми қызметкері; Өл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Қазақстан Республикасы; e-mail: kamshat-0707@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5254-3432>.

Information about the authors

Kamshat Bakytzhanovna Tussupova – PhD, Senior Researcher at the Department of Information Systems; Al-Farabi Kazakh National University, Republic of Kazakhstan; e-mail: kamshat-0707@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5254-3432>.

Поступила в редакцию 01.04.2025

Поступила после доработки 01.06.2025

Принята к публикации 02.06.2025